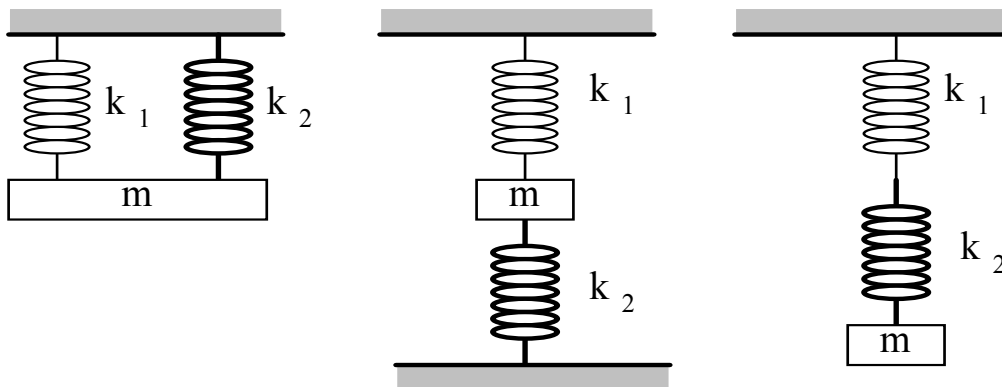


OSCILLATIONS LIBRES DE SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE

Exercice 1: Association de ressorts

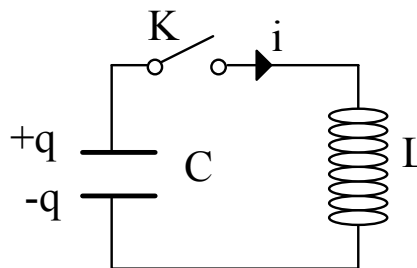
Calculer la fréquence des oscillations pour chacun des systèmes suivants:



Exercice 2 : Oscillateur électrique

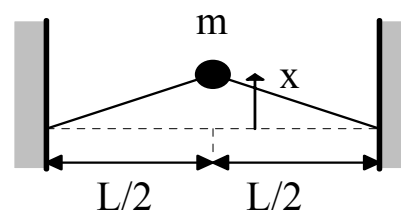
Un circuit électrique est constitué d'une self L (de résistance supposée négligeable) et d'un condensateur de capacité C . La capacité possède une charge Q . A l'instant initial., l'interrupteur K est fermé puis le système oscille librement (voir figure).

- 1) Ecrire l'équation qui régit les variations de la charge q du condensateur au cours du temps.
- 2) Résoudre cette équation et déterminer la période de cet oscillateur. Effectuer l'application numérique pour $L=0.5\text{H}$, $C=0.5\mu\text{F}$. et $Q=0.5\mu\text{C}$.
- 3) Calculer l'énergie du condensateur, celle de la self et l'énergie totale du circuit. Que remarque-t-on ?
- 4) Faire l'analogie avec une masse m accrochée à un ressort .



Exercice 3: Corde plombée

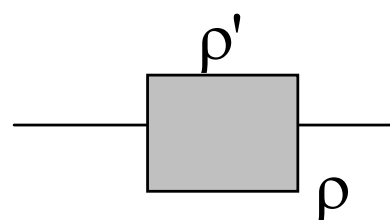
Une masse ponctuelle m glisse sans frottement sur une table horizontale. Elle est fixée à deux bâtis fixes par deux cordes de masse négligeable tendues horizontalement. En supposant que la tension T des cordes reste constante lors du mouvement, calculer la période des oscillations pour de faibles amplitudes du mouvement dans la direction x .



Exercice 4 : Oscillations d'un iceberg

Un iceberg de masse volumique ρ' , assimilable à un parallélépipède régulier et homogène de masse M flotte sur de l'eau de masse volumique constante ρ . Sa surface de base est S et sa hauteur est L .

On rappelle que la poussée d'Archimède qui s'exerce sur un



objet immergé est: $\vec{P}_A = -\rho V \vec{g}$

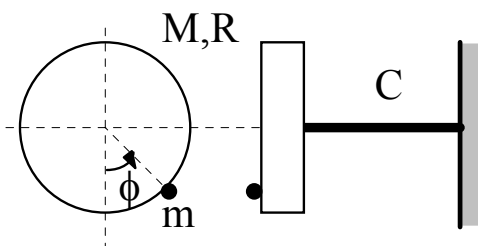
où V est le volume immergé et g l'accélération de la pesanteur.

1) Calculer, à l'équilibre, le volume immergé de l'iceberg en fonction de son volume total. La masse volumique de la glace est $\rho' = 900 \text{ kg/m}^3$; celle de l'eau est $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

2) L'iceberg est écarté d'une distance verticale h par rapport à sa position d'équilibre. Calculer la période de ses oscillations quand les frottements sont considérés comme négligeables. Faire l'application numérique pour $L = 150 \text{ m}$, $h = 2 \text{ m}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

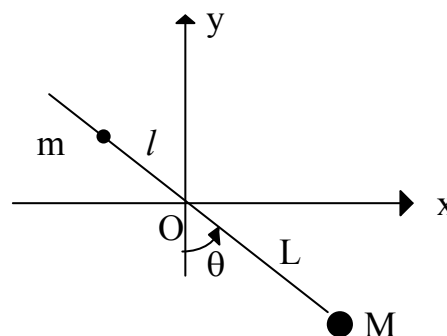
Exercice 5 : Pendule de torsion

Une tige d'acier de constante de torsion C est soudée par son extrémité au centre d'un disque homogène de masse M et de rayon R . L'autre extrémité est encastrée dans un bâti fixe. Une masse m est soudée au point le plus bas du disque. On tourne le disque d'un angle ϕ_0 et on le lâche sans vitesse initiale. Déterminer l'expression en fonction du temps de l'angle $\phi(t)$ d'écart du système par rapport à sa position d'équilibre. On néglige la flexion de la tige d'acier.



Exercice 6 : Métronome

Un métronome est schématisé sur la figure ci-contre. La masse M est soudée à l'extrémité de la tige. La position de la masse m sur la tige peut être réglée. La tige est supposée de masse négligeable; elle est mobile sans frottements autour de O . La masse M étant en bas, on l'écarte d'un angle θ_0 petit et on l'abandonne sans vitesse initiale.



1) Quelle(s) condition(s) doit satisfaire le système pour qu'il puisse osciller ?

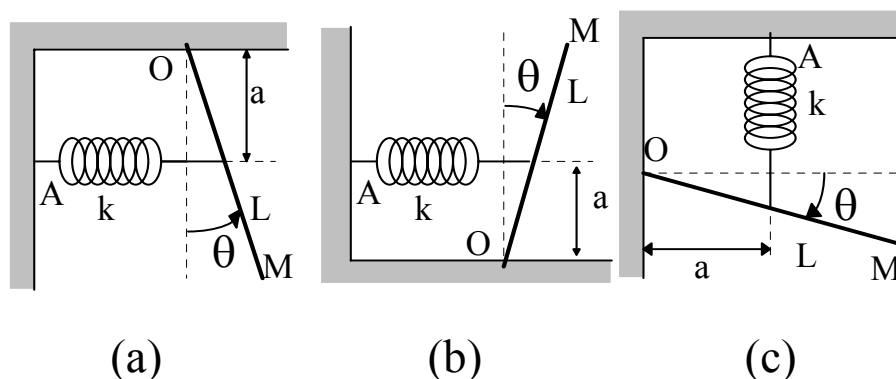
2) Déterminer l'expression de la période pour des oscillations de faibles amplitudes.

3) A.N.: Sachant que $M = 80 \text{ g}$, $m = 20 \text{ g}$ et $L = 4 \text{ cm}$, déterminer la distance l pour que la période du métronome soit égale à 2 s .

4) On veut augmenter la période d'oscillation du métronome. Faut-il rapprocher ou éloigner la masse m du point O ?

Exercice 7 :

Dans les figures ci-dessous, une tige homogène de masse M et de longueur L oscille sans frottement, dans un plan vertical, autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan du mouvement en O .

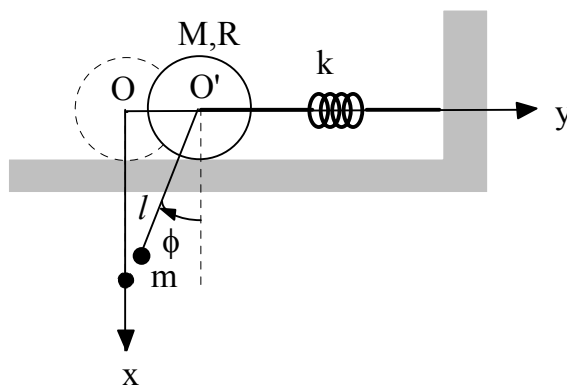


- 1) Quelle est la déformation du ressort à l'équilibre, sachant qu'à cette position $\theta=0$?
- 2) Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des mouvements de faibles amplitudes.
- 3) A quelle condition le système de la figure (b) peut-il osciller? Quelle est la nature du mouvement lorsque cette condition n'est pas satisfaite?
- 4) Expliquer pourquoi la période des oscillations est indépendante de g dans le cas de la figure (c).
- 5) Calculer l'effort appliqué sur le mur au point A.

Exercice 8 :

On considère le dispositif schématisé sur la figure ci-contre. Un disque homogène de masse M et de rayon R est attaché par son axe à l'extrémité d'un ressort de raideur k . Une tige rigide, de longueur l , de masse négligeable, est solidaire du disque qui peut rouler sans glisser sur un plan horizontal.

Déterminer la pulsation propre du système. Sachant qu'à $t=0$, la tige est écartée d'un angle petit ϕ_0 par rapport à la verticale et lâchée sans vitesse initiale, déterminer l'expression de $\phi(t)$. Donner l'expression de la vitesse de la masse m quand la tige passe par la verticale.

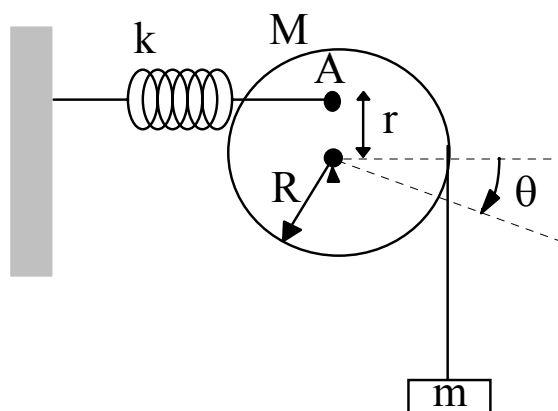


Exercice 9:

Dans le système ci-contre, la corde roule sans glisser autour du cylindre de masse $M=5\text{kg}$ et de rayon $R=40\text{cm}$, qui tourne autour de son axe fixe. Elle porte à son extrémité une masse $m=1\text{kg}$. Un ressort de raideur $k = 600\text{ N/m}$, fixé à un bâti fixe, est accroché au point A distant de $r=20\text{cm}$ de l'axe du cylindre.

1) Sachant qu'à l'équilibre $\theta = 0$ et dans l'hypothèse des oscillations de faible amplitude, établir l'équation différentielle du mouvement. Donner l'expression de θ en fonction du temps pour les conditions initiales suivantes :

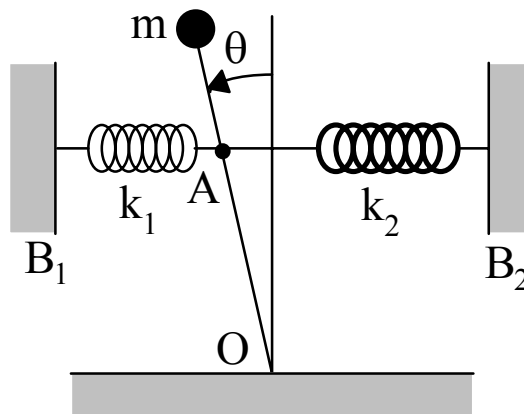
$$\theta(t=0) = 5^\circ \text{ et } \dot{\theta}(t=0) = 0.$$



- 2) Au bout de cinq périodes d'oscillation, la masse m se décroche; quelle est la nature du mouvement à partir de cet instant? Autour de quelle position se font les oscillations? Calculer la nouvelle période du mouvement et l'amplitude des oscillations.
- 3) Tracer le graphe représentant les variations de θ en fonction du temps pour $0 < t < 10$ s.

Exercice 10 :

Soit une masse m fixée à l'extrémité d'une tige de masse négligeable et de longueur l . La tige effectue des oscillations de faibles amplitudes autour d'un axe fixe passant par le point O et perpendiculaire au plan du mouvement. Le point A de la tige, tel que $OA=a$, est relié à deux bâtis fixes B_1 et B_2 respectivement par deux ressorts de raideur k_1 et k_2 . A l'équilibre, la tige est verticale.



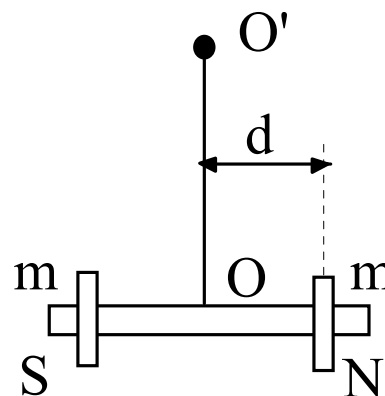
a) Sachant qu'à l'équilibre, les ressorts ne sont pas déformés, établir l'équation différentielle du mouvement du système.

b) Si m , k_1 , k_2 et l sont donnés, quelle condition doit satisfaire la longueur a pour que le système puisse osciller?

c) Cette condition étant satisfaite, déterminer l'expression de la pulsation propre du système.

Exercice 11: Oscillations d'un moment magnétique :

On veut mesurer la composante horizontale du champ magnétique terrestre B_0 à l'aide d'un pendule formé d'un aimant horizontal de moment magnétique \vec{M} et de masse M mobile dans le plan horizontal, autour d'un axe vertical OO' . L'aimant a la forme d'un parallélépipède rectangle de côtés L , l et h . On tourne ce barreau d'un angle θ_0 par rapport à sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale.



1) Sachant qu'aucun couple de torsion autre que magnétique n'agit sur le système, écrire l'équation du mouvement dans le cas où les frottements sont négligeables. En déduire la période d'oscillation du barreau dans le cas des faibles amplitudes. Retrouver l'équation du mouvement en utilisant la méthode de Lagrange.

2) Calculer B_0 si $T = 8,2$ s, $|\vec{M}| = 2 \text{ A.m}^2$, $L = 10$ cm, $l = h = 1$ cm, $M = 80$ g.

3) Dans la pratique, on procède autrement afin d'éviter le calcul du moment d'inertie J du barreau. L'expérience précédente étant achevée, on la répète en plaçant sur le barreau deux masses cylindriques en cuivre, de masse $m = 15$ g, à des distances $d = 4$ cm de l'axe OO' . La nouvelle valeur de la période est alors $T' = 10,7$ s. Calculer B_0 .

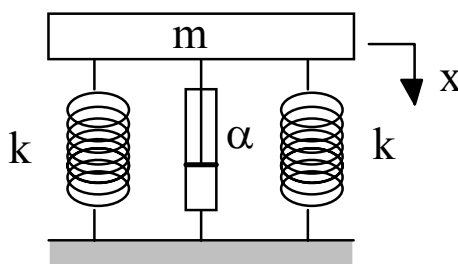
N.B. On rappelle qu'un aimant de moment magnétique \vec{M} , placé dans un champ magnétique \vec{B} , est soumis à un couple $\vec{\Gamma} = \vec{M} \times \vec{B}$.

OSCILLATIONS LIBRES DE SYSTEMES AMORTIS A UN DEGRE DE LIBERTE

Exercice 1 : Une masse $m = 20 \text{ kg}$ est montée sur deux ressorts de raideur $k=4 \text{ kN/m}$ et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux $\alpha=130 \text{ kg/s}$. A l'instant initial, la masse est écartée de 5 cm de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale.

a) Calculer le déplacement et la vitesse de la masse m en fonction du temps.

b) Quels sont le déplacement et la vitesse à l'instant $t=1 \text{ s}$?



Exercice 2 : Le circuit ci-contre est constitué d'un condensateur de capacité $C=1\mu\text{F}$, d'une bobine d'inductance $L=0.1\text{mH}$ et d'une résistance R pouvant prendre les valeurs 1Ω , 5Ω et $1\text{k}\Omega$. Le condensateur est initialement chargé sous une tension de 5V . A l'instant $t=0\text{s}$, on ferme brusquement l'interrupteur K .

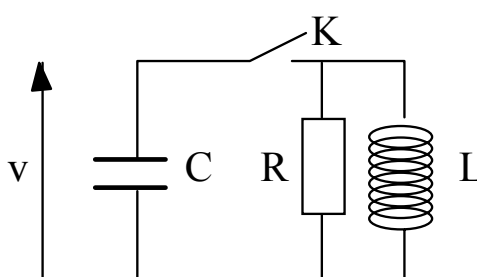
1) Etablir l'équation différentielle qui régit les variations de la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur.

2) Pour les trois valeurs de la résistance:

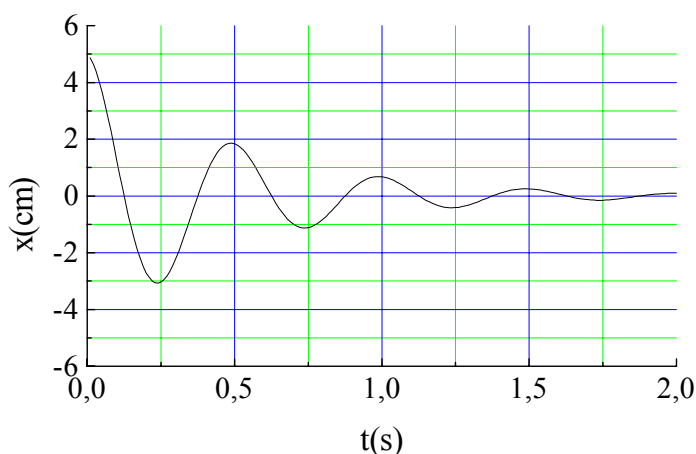
a) Quelles sont les valeurs de δ et ω_0 ?

b) En déduire les variations de $v(t)$ au cours du temps.

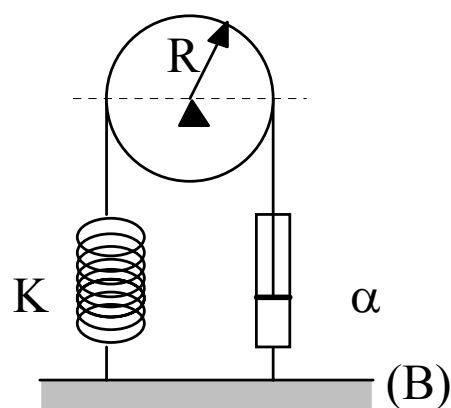
c) Tracer le graphe de $v(t)$ en fonction du temps.



Exercice 3 : Un bloc de masse 25 kg est monté sur un support en caoutchouc, de masse négligeable, qui se comprime de 6.1cm sous ce poids. Quand le bloc vibre librement, on enregistre les positions de la masse après l'avoir déplacé de 5cm à partir de sa position d'équilibre (voir figure ci-contre). Sachant que le tapis de caoutchouc peut être symbolisé par un ressort de raideur K associé à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α , calculer ces coefficients K et α .

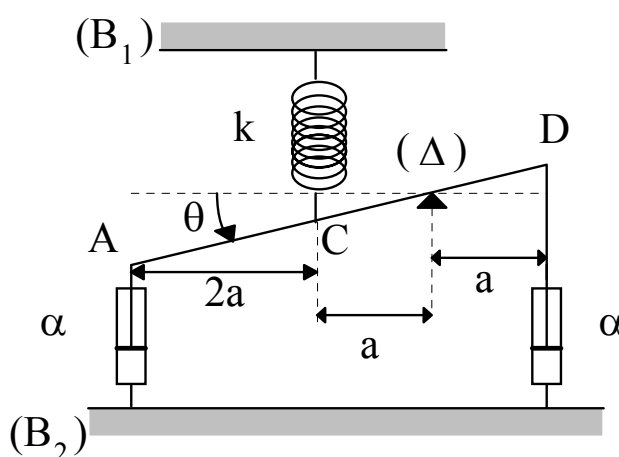


Exercice 4 : Le système de la figure ci-contre est constitué d'un cylindre homogène de masse M et de rayon R en rotation autour de son axe de révolution fixe. Un fil inextensible, de masse négligeable, entraîne le cylindre sans glissement sur sa périphérie ; ses deux extrémités sont reliées à un bâti fixe (B) par un ressort de raideur K et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α . Quelle la valeur critique du coefficient α ?



Exercice 5 :

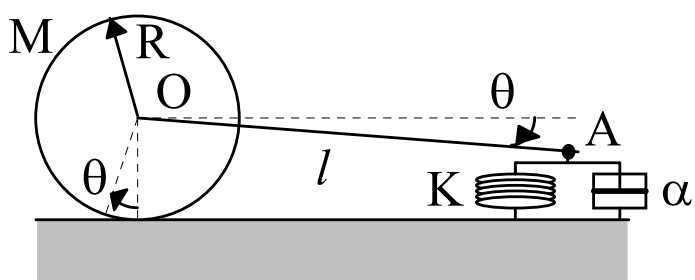
Le système mécanique de la figure ci-dessus est constitué d'une tige rectiligne AD, homogène, de masse $M=3\text{kg}$ et de longueur $L=2\text{m}$. Cette tige peut tourner, dans le plan vertical, sans frottement, autour d'un axe horizontal (Δ) fixe. Les extrémités A et D de la tige sont reliées au bâti fixe B_2 par deux amortisseurs identiques de coefficient de frottement visqueux α . Le point C, milieu de la tige, est relié au bâti B_1 par un ressort de raideur k . A l'équilibre, la tige est horizontale.



Lorsque la tige est écartée de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 puis lâchée sans vitesse initiale, elle prend un mouvement oscillatoire amorti de pseudo-période 1s . On constate qu'au bout de 5 pseudo-périodes, l'amplitude est égale à 20 % de l'amplitude initiale. En déduire la valeur numérique de α puis celle de k .

Exercice 6:

Le système de la figure ci-contre est constitué d'un cylindre homogène de masse $M=1\text{kg}$ et de rayon $R=10\text{cm}$, qui roule sans glisser sur un plan horizontal. Une tige OA de longueur $l=1\text{m}$ et de masse négligeable, est soudée perpendiculairement sur l'axe O du cylindre. Son extrémité A est



reliée au plan horizontal par l'intermédiaire d'un ressort de raideur K et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α . A l'équilibre, la tige OA est horizontale. lorsque cette tige est écartée de cette position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale, le système effectue des oscillations de petite amplitude faiblement amorties.

1/ On supposera que la longueur l de la tige est grande devant le rayon R du cylindre. Montrer que dans le cas des oscillations de faibles amplitudes, on peut considérer que l'extrémité A de la tige n'effectue que des oscillations verticales.

2/ Sachant que la période des oscillations est $T=1\text{s}$ et que l'amplitude des vibrations chute de moitié après 5 périodes d'oscillation, calculer la raideur K du ressort et le coefficient de frottement visqueux α .