

Chapitre 2

Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

2.1 Oscillations non amorties

2.1.1 Oscillateur linéaire

Un système oscillant à un degré de liberté est habituellement repéré à l'aide d'une coordonnée généralisée q qui est l'écart par rapport à la position d'équilibre stable. Le mouvement vibratoire est dit linéaire s'il est régi par une équation différentielle harmonique de la forme :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Cette équation est appelée équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple.

2.1.2 Energie Cinétique

Dans le cas d'un système à un degré de liberté, constitué d'une masse m dont la position est repérée par la coordonnée généralisée q , l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right]^2 = \frac{1}{2} m \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} \right]^2 = \frac{1}{2} m \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right]^2 \dot{q}^2$$

L'énergie cinétique d'un système à un degré de liberté est fonction de q et \dot{q} . Elle peut s'écrire sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2$$

où $a(q)$ est une fonction de la coordonnée généralisée q , définie dans le cas étudié par :

$$a(q) = m \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right]^2$$

En faisant un développement limité de $a(q)$ au second ordre en q , au voisinage de $q = 0$, on obtient :

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \left[a(0) + \left. \frac{\partial a}{\partial q} \right|_{q=0} q + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 a}{\partial q^2} \right|_{q=0} q^2 + \dots \right] \dot{q}^2$$

En limitant l'approximation au second ordre, on obtient :

$$T = \frac{1}{2} a_0 \dot{q}^2$$

où a_0 est une constante égale à $a(0)$.

2.1.3 Energie potentielle

Les oscillations se font autour de la position d'équilibre stable $q = 0$ caractérisée par $\frac{\partial U}{\partial q}(q = 0) = 0$. Il est toujours possible, lorsque les écarts par rapport à la position d'équilibre sont faibles, de faire un développement en série de Taylor de $U(q)$ au voisinage de la position d'équilibre $q = 0$. En négligeant les puissances de q d'ordre supérieur à deux, on obtient :

$$U(q) = U(0) + \left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=0} q + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=0} q^2 + \dots$$

$q = 0$ correspond à un minimum de $U(q)$ pour lequel

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=0} > 0$$

Si on choisit l'origine de l'énergie potentielle à cette position d'équilibre ($U(0) = 0$), l'énergie potentielle $U(q)$ peut s'écrire sous une forme quadratique :

$$U(q) \simeq \frac{1}{2} b_0 q^2$$

$$\text{avec : } b_0 = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=0}$$

2.1.4 Equation différentielle

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

Ce qui permet d'obtenir l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple où :

$$\omega_0^2 = \frac{b_0}{a_0} = \frac{\left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=0}}{a_0}$$

Les oscillations d'un système vibratoire s'effectuent autour d'une position d'équilibre stable. Pour des oscillations de faible amplitude autour de la position d'équilibre, tous les mouvements vibratoires peuvent être assimilés à des vibrations linéaires et l'énergie potentielle peut alors être approximée par une forme quadratique de la coordonnée q , tandis que l'énergie cinétique peut être approximée par une forme quadratique en \dot{q} .

