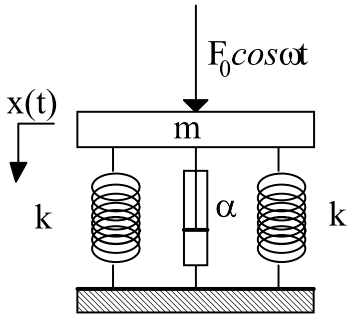
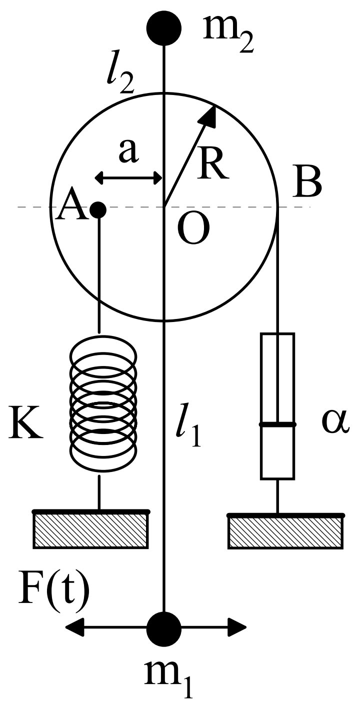
OSCILLATIONS FORCEES DE SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE

Exercice 1: Dans la figure ci-contre, on a:
$m = 4.5$ kg, $k = 3500$ N/m, $\alpha = 30$ kg/s, $F_0 = 3$ N, ω=10 rd/s.
Déterminer l'amplitude de vibration du bloc de masse M et l'amplitude de la force transmise au sol.



Exercice 2 : Un disque circulaire homogène, de masse M, de rayon R, peut osciller sans frottements autour de son axe horizontal 0. Deux masses m_1 et m_2 sont soudées aux extrémités d'une tige de masse négligeable liée rigidement au disque et passant par O. Les distances de m_1 et m_2 au centre sont notées respectivement l_1 et l_2. Un ressort vertical, de constante de raideur K a une extrémité fixe et l'autre est reliée au disque en un point A situé à une distance a de O. En position d'équilibre la tige est verticale avec m_1 en bas et le point A est au même niveau que le centre O. Le disque subit un frottement visqueux de coefficient α au point B. La masse m_1 est soumise à une force $F(t)=F_0 \cos(\Omega t)$ perpendiculaire à la tige.

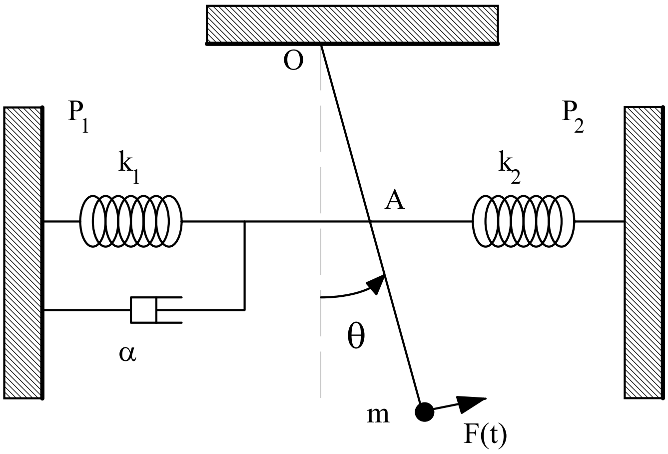


Valeurs numériques :
M=1kg, $m_1 = m_2 = 0.1$kg, K=16N/m, R=20cm, l_1 =50cm,
l_2 =25cm, a=10cm, g=10m/s^2 , α=7.2510^{-2} kg/s.

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement.
b) Trouver sa solution en régime permanent.
c) Calculer le facteur de qualité Q du système.
d) Déterminer la valeur de F_0 pour qu'à la résonance l'amplitude maximale soit égale à $\pi/30$ rad.

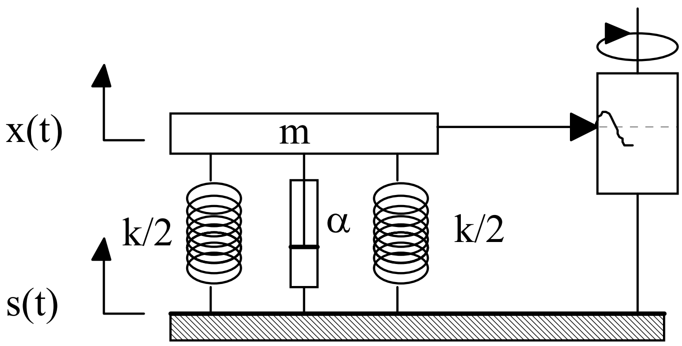
Exercice 3 :

La masse m, représentée sur la figure ci-contre, est soudée à l'extrémité de la tige de longueur l de masse négligeable. Cette masse est soumise à une force perpendiculaire, sinusoïdale de pulsation ω. L'autre extrémité est articulée au point O. La tige est reliée au point A au bâti fixe B_1 par un ressort de coefficient de raideur k_1 et un amortisseur dont le coefficient de frottement vaut α. Elle est, en outre, reliée au bâti fixe B_2 par un ressort de raideur k_2. La distance OA est égale à $l/2$.



1. Déterminer l'expression de l'amplitude des oscillations en fonction de la pulsation ω. En déduire la pulsation de résonance.
2. Déterminer la puissance instantanée et la puissance moyenne fournie au système.
3. Déterminer la puissance instantanée et la puissance moyenne dissipée dans le système. Conclusion.

Exercice 4 : Le dispositif mécanique ci-contre représente le schéma de principe d'un appareil de mesure de vibrations. La masse m est liée par deux ressorts et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α, un support rigidement lié au système mécanique dont on veut étudier les vibrations. Le mouvement du support est repéré par s(t) tandis que le mouvement de la masse est repéré par x(t). On étudie des vibrations sinusoïdales de la forme $s(t) = S_0 \cos(\Omega t)$.



L'origine est prise à la position d'équilibre.

1) Ecrire le lagrangien du système. En déduire l'équation du mouvement de la masse m en fonction de la coordonnée relative $y(t) = x(t) - s(t)$.

2) Déterminer la solution stationnaire y(t).

3) Dans le cas de ressorts de faible raideur, la pulsation propre ω_0 est petite devant la pulsation Ω. Donner dans ce cas l'expression de y(t). Montrer que l'on peut ainsi déterminer facilement l'amplitude S_0 de la vibration (on a réalisé ainsi un vibromètre).

4) Lorsque la raideur des ressorts est élevée, la pulsation propre ω_0 est grande devant la pulsation Ω des vibrations. Montrer , dans ce cas, que l'on peut déterminer facilement l'accélération du support (on a ainsi réalisé un accéléromètre).

Exercice 5: (suite de l'exercice 5 de la page 13)

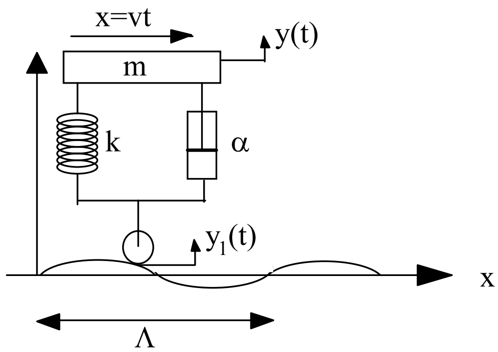
Le bâti B_1 est maintenant animé d'un mouvement vertical sinusoïdal donné par: $x = X \cos(\Omega t)$ où X = 1 cm.

1/Montrer que l'équation différentielle qui régit le mouvement du système peut s'écrire:

$$\ddot{\theta}+2\delta\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=A_0\cos(\Omega t)$$

On précisera de manière explicite le terme A_0. Calculer sa valeur numérique.
2/ Quelle est l'expression de la solution $\theta(t)$ lorsque le régime permanent est établi? Vérifier que le système est très faiblement amorti; en déduire la fréquence de résonance et l'amplitude de $\theta(t)$ à la résonance.
3/ Quelle est, à la résonance, l'amplitude de la force F_T transmise au sol par chaque amortisseur?

Exercice 6 : Un véhicule roulant est un système complexe à plusieurs degrés de liberté. La figure ci-contre peut être considérée comme une première approximation d'un véhicule qui se déplace sur une route ondulée décrite par le profil y_1 (t). Dans ce modèle simplifié, on suppose que:



- La raideur élastique des pneus est infinie, c'est-à-dire que les ondulations de la route sont intégralement transmises à la suspension du véhicule.
- Les roues ne décollent pas de la chaussée.
- On s'intéresse uniquement au déplacement vertical y(t) du véhicule dans le plan de la figure.
- On se place dans le cas simple où le véhicule se déplace horizontalement à une vitesse constante v sur une route à profil sinusoïdal $y_1(x)=Y_1\sin(2\pi x/\Lambda)$.

1) Etablir l'équation différentielle qui régit les variations au cours du temps de la coordonnée y du véhicule.
2) En déduire l'amplitude Y du mouvement du véhicule dans le sens vertical .
3) Application numérique m=350 kg, k=350 kN/m, v=100km/h, Λ=5m, Y_1 =20cm;
   a) pour α=2000 N.s/m,
   b) pour α=200 N.s/m.

Exercice 7 :

Les machines tournantes (moteurs électriques, turbines, machines à laver, etc...) peuvent être le siège de vibrations importantes car très souvent le centre de masse ne coïncide pas avec l'axe de rotation. Pour limiter ces vibrations on utilise des supports antivibratoires constitués généralement de caoutchouc renforcé. En raison de leurs propriétés mécaniques ces supports peuvent être modélisés par un amortisseur en parallèle avec un ressort.

On se propose d'étudier à titre d'exemple le cas d'une machine à laver le linge (figure1). Soit M la masse de cette machine. La partie tournante est constituée d'un tambour de rayon e tournant à une vitesse angulaire constante ω. On considère que la masse tournante est constituée par le linge de masse m. Pour des raisons de simplicité, on suppose que le lave-linge ne peut effectuer que des mouvement verticaux repérés par la coordonnée y.
1) Etablir l'équation différentielle du mouvement pour la coordonnée y.
2) Montrer qu'un tel dispositif est équivalent au schéma simplifié de la figure 2; donner l'expression de F_{eq} .
3) Dans l'hypothèse des faibles amortissements ($\delta \ll \omega_0$), tracer et commenter le graphe de l'amplitude Y du déplacement vertical du lave-linge en fonction de la vitesse de rotation.

4) Calculer l'amplitude de la force transmise au sol à la résonance.

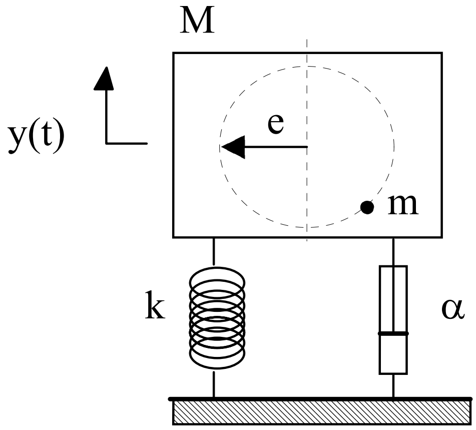


Figure 1

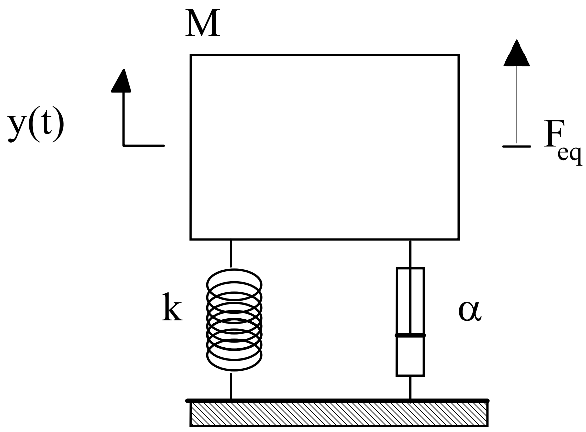
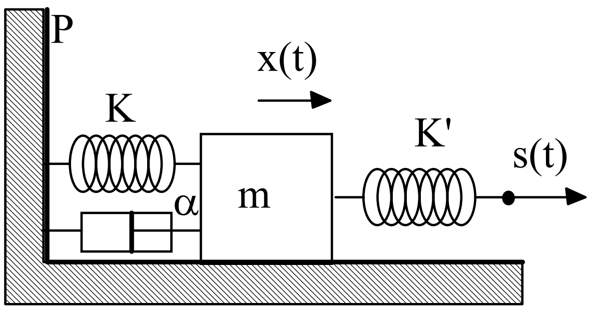


Figure 2

Exercice 8: Soit une masse m liée à un support P par un ressort de constante de raideur K et par un amortisseur à frottement visqueux de coefficient α. L'autre extrémité de la masse est liée à un ressort de constante de raideur K'. Le point d'attache de K' est soumis à un déplacement s(t) sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude S_0.



1/ Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse m. En déduire la pulsation propre ω_0 et la force excitatrice agissant sur m.

2/ Trouver le déplacement en régime permanent de la masse m et établir l'expression de son amplitude de vibration X_0 en fonction de la pulsation ω.

3/ Calculer le coefficient d'amortissement α pour que l'amplitude des mouvements de la masse m soit égale à $S_0/10$ lorsque $\omega=\omega_0$.

A.N.: K = K' = 10 N/m ; m = 0,1 kg ; S_0 = 1 cm

4/ Déterminer le module de l'amplitude de la force transmise au support P.

5/ On définit comme facteur de transmission T, le rapport entre le module de l'amplitude de la force transmise au support P et celui de l'amplitude de la force excitatrice agissant sur la masse m :

$$T = \frac{|F_{trans}|}{|F_{exc}|}$$

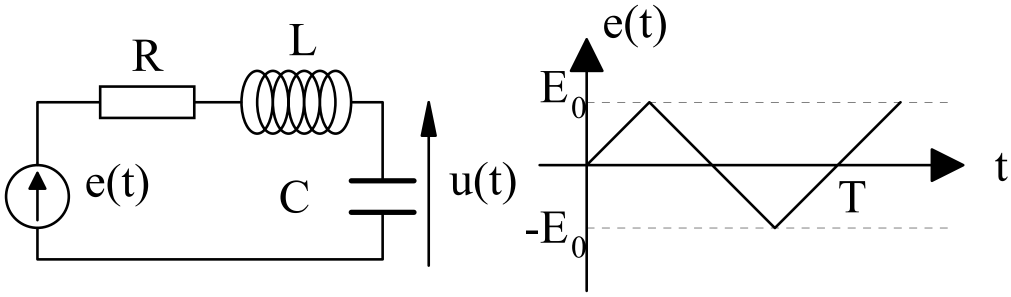
a/ Déterminer T.

b/ Calculer T pour $\omega = \sqrt{2}\omega_0$

A.N.: K = K' = 10 N/m ; m = 0,1 kg et α = 100 kg/s

c/ Que devient T pour $\omega >> \omega_0$? Conclusion.

Exercice 9 :



Le circuit RLC ci-dessus est alimenté par un générateur délivrant une force électromotrice périodique e(t) telle que représentée sur le schéma.

1) Donner le développement en série de Fourier de e(t).

2) Déterminer la tension u(t) aux bornes du condensateur en régime permanent.

3) Faire l'application numérique pour E_0=10V, f=1/T=1600Hz, L=100mH, C=0.1µF, R=200 Ω

Que remarque-t-on? ce résultat est-il valable pour d'autres valeurs de la fréquence du générateur?