

Université des Sciences et de la Technologie Houari  
Boumediène

*Faculté de Physique*

# VIBRATIONS ET ONDES

Manuel de Cours

*Pr. DJELOUAH Hakim*

*Année Universitaire 2008-2009*

Université des Sciences et de la Technologie Houari  
Boumedienne

Vibrations et Ondes  
Cours

H. DJELOUAH

4 septembre 2008

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction aux équations de Lagrange</b>	<b>5</b>
1.1	Equations de Lagrange pour une particule . . . . .	5
1.1.1	Equations de Lagrange . . . . .	5
1.1.2	Cas des systèmes conservatifs . . . . .	7
1.1.3	Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse . . . . .	8
1.1.4	Cas d'une force extérieure dépendant du temps . . . . .	9
1.2	Système à plusieurs degrés de liberté . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté</b>	<b>10</b>
2.1	Oscillations non amorties . . . . .	10
2.1.1	Oscillateur linéaire . . . . .	10
2.1.2	Energie Cinétique . . . . .	10
2.1.3	Energie potentielle . . . . .	11
2.1.4	Equation différentielle . . . . .	11
2.1.5	Résolution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple . . . . .	12
2.2	Oscillations libres des systèmes amortis à un degré de liberté . . . . .	12
2.2.1	Equation de Lagrange pour les systèmes dissipatifs . . . . .	12
2.2.2	Cas particulier des oscillations de faible amplitude . . . . .	13
2.2.3	Résolution de l'équation différentielle . . . . .	13
2.2.4	Exemples . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté</b>	<b>18</b>
3.1	Equation différentielle . . . . .	18
3.2	Système masse-ressort-amortisseur . . . . .	18
3.3	Solution de l'équation différentielle . . . . .	19
3.3.1	Cas particulier où $A(t) = A_0 \cos(\Omega t)$ . . . . .	20
3.3.2	Cas d'une excitation périodique . . . . .	23
3.4	Impédance mécanique . . . . .	24
3.4.1	Définition . . . . .	24
3.4.2	Impédances mécaniques . . . . .	24
3.4.3	Puissance . . . . .	25
3.4.4	Applications . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté</b>	<b>27</b>
4.1	Introduction . . . . .	27
4.2	Systèmes à deux degrés de liberté . . . . .	28
4.2.1	Système masses-ressorts en translation . . . . .	28
4.2.2	Cas particulier de deux oscillateurs identiques . . . . .	31

4.2.3	Pendules couplés . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté</b>	<b>36</b>
5.1	Equations de Lagrange . . . . .	36
5.2	Système masses-ressorts-amortisseurs . . . . .	36
5.2.1	Equations différentielles . . . . .	37
5.2.2	Etude du régime permanent sinusoïdal . . . . .	37
5.3	Impédance . . . . .	39
5.4	Application . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Généralités sur les phénomènes de propagation</b>	<b>41</b>
6.1	Propagation à une dimension . . . . .	41
6.1.1	Equation de propagation . . . . .	41
6.1.2	Solution de l'équation de propagation . . . . .	41
6.1.3	Onde progressive sinusoïdale . . . . .	44
6.1.4	Superposition de deux ondes progressives sinusoïdales . . . . .	45
6.1.5	Vitesse de phase . . . . .	46
6.1.6	Vitesse de groupe . . . . .	47
6.1.7	Onde Vectorielle . . . . .	49
6.2	Propagation en trois dimensions . . . . .	49
6.2.1	Equation de propagation . . . . .	49
6.2.2	Onde plane progressive sinusoïdale . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Cordes vibrantes</b>	<b>52</b>
7.1	Equation des ondes . . . . .	52
7.2	Ondes progressives harmoniques . . . . .	53
7.2.1	Définition . . . . .	53
7.2.2	Force en un point . . . . .	54
7.2.3	Impédance . . . . .	54
7.3	Oscillations libres d'une corde de longueur finie . . . . .	54
7.4	Réflexion et transmission . . . . .	56
7.4.1	Réflexion et transmission entre deux cordes semi-infinies . . . . .	56
7.4.2	Réflexion sur une impédance quelconque . . . . .	57
<b>8</b>	<b>Ondes acoustiques dans les fluides</b>	<b>58</b>
8.1	Introduction . . . . .	58
8.2	Equation d'onde . . . . .	58
8.3	Vitesse du son . . . . .	61
8.4	Onde progressive sinusoïdale . . . . .	62
8.4.1	Définition . . . . .	62
8.4.2	Impédance acoustique . . . . .	62
8.4.3	Energie acoustique . . . . .	63
8.5	Reflexion-Transmission . . . . .	66
<b>9</b>	<b>Propagation d'une onde électrique dans une ligne coaxiale</b>	<b>68</b>
9.1	Introduction . . . . .	68
9.2	Equation de propagation . . . . .	68
9.3	Solution de l'équation de propagation . . . . .	69
9.4	Onde Progressive sinusoïdale . . . . .	70

9.4.1	Définition . . . . .	70
9.4.2	Impédance en un point . . . . .	70
<b>10</b>	<b>Eléments d'analyse vectorielle</b>	<b>71</b>
10.1	Champ scalaire - Champ vectoriel . . . . .	71
10.2	Gradient d'un champ scalaire . . . . .	71
10.3	Divergence d'un champ vectoriel . . . . .	71
10.4	Rotationnel d'un champ vectoriel . . . . .	71
10.5	Laplacien scalaire . . . . .	72
10.6	Laplacien vectoriel . . . . .	72
10.7	Opérateur nabla . . . . .	72
10.8	Théorème de Stokes-Théorème de Gauss . . . . .	73
10.8.1	Circulation d'un champ vectoriel . . . . .	73
10.8.2	Flux d'un champ vectoriel . . . . .	73
10.8.3	Théorème de Stokes . . . . .	74
10.8.4	Théorème de Gauss-Ostrogradski (ou théorème de la divergence) . . . . .	74
<b>11</b>	<b>Les équations de Maxwell dans le vide</b>	<b>75</b>
11.1	Le champ électromagnétique . . . . .	75
11.1.1	Champ électromoteur et vecteur densité de courant . . . . .	75
11.1.2	Le champ magnétique . . . . .	76
11.2	Le régime variable . . . . .	77
11.2.1	Le phénomène de propagation . . . . .	77
11.2.2	Le phénomène d'induction . . . . .	77
11.2.3	Le phénomène de capacité . . . . .	77
11.3	L'induction électromagnétique . . . . .	77
11.3.1	Loi de Faraday-Lenz . . . . .	77
11.3.2	Equation de Maxwell-Faraday . . . . .	78
11.4	Le théorème d'Ampère . . . . .	79
11.4.1	Equation de continuité . . . . .	79
11.4.2	Le théorème d'Ampère . . . . .	80
11.5	En résumé . . . . .	80
<b>12</b>	<b>Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide</b>	<b>82</b>
12.1	Equations de propagation pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ . . . . .	82
12.2	L'onde plane progressive sinusoïdale . . . . .	83
12.2.1	Relation de dispersion . . . . .	83
12.2.2	Structure de l'onde uniforme plane . . . . .	84
12.3	Onde plane uniforme progressive et sinusoïdale . . . . .	84
12.3.1	Onde de polarisation rectiligne . . . . .	84
12.3.2	Onde de polarisation quelconque . . . . .	85
12.3.3	Notation complexe . . . . .	86
12.4	Energie électromagnétique : vecteur de Poynting . . . . .	87
12.4.1	Onde de forme spatiale et temporelle quelconques . . . . .	88
12.4.2	Onde plane progressive et uniforme sinusoïdale . . . . .	89

<b>13 Réflexion et transmission des ondes électromagnétiques</b>	<b>91</b>
13.1 Equations de Maxwell dans les milieux parfaits . . . . .	91
13.2 Propagation dans les milieux diélectriques . . . . .	92
13.3 Relations de passage . . . . .	93
13.4 Lois de Snell-Descartes . . . . .	94
13.5 Formules de Fresnel . . . . .	96
13.5.1 Champ électrique dans le plan d'incidence . . . . .	96
13.5.2 Champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence : . . . . .	97
13.5.3 Discussion des résultats . . . . .	98
13.6 Réflexion sur un conducteur parfait . . . . .	100
<b>A Equations différentielles</b>	<b>102</b>
A.1 Introduction . . . . .	102
A.2 Equation homogène . . . . .	102
A.2.1 Régime fortement amorti ( $\delta > \omega_0$ ) . . . . .	103
A.2.2 Régime critique ( $\delta = \omega_0$ ) . . . . .	104
A.2.3 Régime pseudo-périodique ( $\delta < \omega_0$ ) . . . . .	105
A.3 Equation avec second membre . . . . .	107
A.3.1 Solution générale . . . . .	107
A.3.2 Cas particulier où $A(t)$ est constante . . . . .	108
A.3.3 Cas particulier où $A(t) = A_0 \cos(\Omega t)$ : . . . . .	109
A.3.4 Cas où $A(t)$ est une fonction périodique du temps . . . . .	110