

RAPPELS DE MATHÉMATIQUES

TRIGONOMETRIE :

Exercice 1 : Un déplacement harmonique est décrit par $x(t)=10\cos(\pi t/5)$ (x en mm, t en secondes et la phase en radians). Déterminer :

- (a) la fréquence et la période du mouvement;
- (b) l'amplitude du déplacement, de la vitesse et de l'accélération;
- (c) le déplacement, la vitesse et l'accélération aux instants $t=0$ s et $t=1.2$ s.

Exercice 2 : Un accéléromètre indique que l'accélération d'un dispositif mécanique est sinusoïdale de fréquence 40Hz. Si l'amplitude de l'accélération est de 100 m/s^2 , déterminer l'amplitude du déplacement et de la vitesse.

Exercice 3 : Un mouvement harmonique est décrit par $x(t)=X \cos(100t+\varphi)$. Les conditions initiales sont $x(0)=4.0\text{mm}$ et $\dot{x}(0)=1.0\text{m/s}$.

- a) Calculer X et φ .
- b) Exprimer $x(t)$ sous la forme $x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ et en déduire les valeurs de A et B .

Exercice 4 : Montrer que $x(t) = 2 \sin(\omega t) + 3 \cos(\omega t)$ peut se mettre sous la forme : $x(t) = X \cos(\omega t + \alpha)$. Quelles sont les valeurs de X et α ?

Exercice 5 : Représenter graphiquement les variations au cours du temps d'un mouvement périodique décrit par:

- a) $x(t) = 3 \sin(2\pi t) + 3 \sin(20\pi t)$;
- b) $x(t) = 3 \sin(2\pi t) + 3 \sin(2.2\pi t)$.

DEVELOPPEMENT EN SERIES DE FOURIER

Exercice 6 : 1) Représenter graphiquement chacune des fonctions suivantes dont la période est égale à T . Préciser la parité de chacune de ces fonctions :

a) $f(t) = t$ pour $-T/2 \leq t \leq T/2$ b) $\begin{cases} f(t) = -t & \text{pour } -T/2 \leq t \leq 0 \\ f(t) = t & \text{pour } 0 \leq t \leq T/2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} f(t) = -a & \text{pour } -T/2 \leq t \leq 0 \\ f(t) = a & \text{pour } 0 \leq t \leq T/2 \end{cases}$ d) $f(t) = t^2$ pour $-T/2 \leq t \leq T/2$

e) $\begin{cases} f(t) = 0 & \text{pour } -T/2 \leq t \leq 0 \\ f(t) = t & \text{pour } 0 \leq t \leq T/2 \end{cases}$

2) Calculer les coefficients du développement en série de Fourier de chacune de ces fonctions.

3) Quelle est la valeur moyenne sur une période de chacune de ces fonctions?

NOMBRES COMPLEXES :

Exercice 7 : Exprimer les nombres complexes suivants sous la forme $Z = |Z| e^{j\phi}$:

a) $1 - j\sqrt{3}$ b) -2 c) $\frac{3}{\sqrt{3} - j}$ d) $5j$

e) $\frac{3}{[\sqrt{3} - j]^2}$ f) $(\sqrt{3} + j)(3 + 4j)$ g) $\frac{\sqrt{3} - j}{3 - 4j}$ h) $(2j)^2 + 3j + 8$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES :

Exercice 8 : Calculer et représenter graphiquement la solution de l'équation différentielle

homogène $\ddot{x} + 4\dot{x} = 0$, pour les conditions initiales suivantes : a) $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 0$.

b) $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 2$.

Exercice 9 : Pour les conditions initiales suivantes :

a) $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 0$. b) $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 2$. c) $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 2$

calculer et représenter graphiquement les solutions des équations différentielles homogènes suivantes:

1. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$

2. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$

3. $\ddot{x} + 0.3\dot{x} + 4x = 0$

Exercice 10 : Pour les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$, calculer et représenter graphiquement la solution générale de chacune des équations différentielles inhomogènes suivantes :

1. $\ddot{x} + 4\dot{x} = 5$

5. $\ddot{x} + 4\dot{x} = 5 \cos(3t)$

2. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 5$

6. $\ddot{x} + 4\dot{x} = 5 \cos(2t)$

3. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 5$

7. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 5 \cos(3t)$

4. $\ddot{x} + 0.3\dot{x} + 4x = 5$

8. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 5 \cos(3t)$

9. $\ddot{x} + 0.3\dot{x} + 4x = 5 \cos(3t)$

Exercice 11 : Calculer la solution particulière de chacune des équations différentielles inhomogènes suivantes :

1. $\ddot{x} + 4\dot{x} = f(t)$

2. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = f(t)$

3. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = f(t)$

où $f(t)$ est une fonction. de période T , définie par :

$$\begin{cases} f(t) = -a & \text{pour } -T/2 \leq t \leq 0 \\ f(t) = a & \text{pour } 0 \leq t \leq T/2 \end{cases}$$