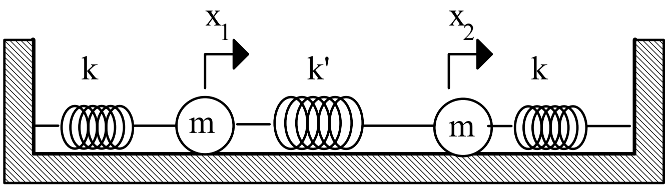
OSCILLATIONS LIBRES DES SYSTEMES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE

Exercice 1: Soit le système mécanique représenté par la figure ci-contre, composé de deux oscillateurs linéaires (m,k) couplés par un ressort de raideur k'.



1. Ecrire le lagrangien du système.
2. a) Mettre ce Lagrangien sous la forme:

$$L = \frac{1}{2} m \left[\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \right) - \omega_0^2 \left(x_1^2 + x_2^2 - 2C x_1 x_2 \right) \right].$$

Donner les expressions de ω_0^2 et C (coefficient de couplage).

b) En déduire les équations du mouvement.

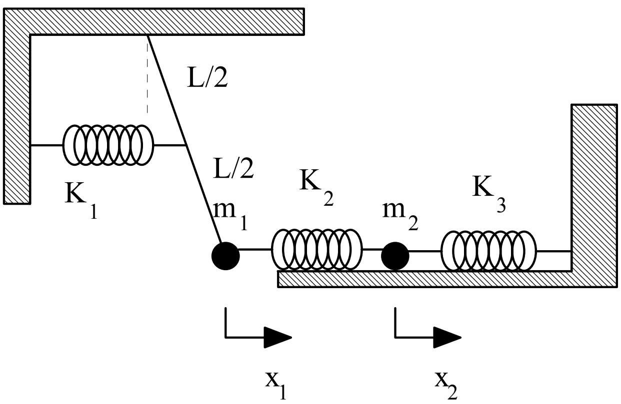
3. a) Déterminer les pulsations propres du système.

b) Sachant que $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 0{,}5$s et C=0,3, calculer les valeurs numériques des périodes propres.

4. Le coefficient de couplage C étant faible, donner les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ avec les conditions initiales suivantes: à t=0s: $x_1(0) = X_0, \dot{x}_1(0) = 0$ et $x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0)$. Quel phénomène physique observe-t-on ?
5. a) Tracer l'allure des courbes représentatives de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

b) Calculer le temps t_1 au bout duquel l'énergie se trouvant à l'instant t=0s dans le premier oscillateur (donné par x_1), est intégralement transférée pour la première fois au second

Exercice 2: Soit le système mécanique représenté figure ci-contre. Les variables $x_1(t)$ et $x_2(t)$ représentent les déplacements horizontaux (à partir de l'équilibre) des masses m_1 et m_2 dans le cas des petites oscillations. La tige de longueur L est de masse négligeable.



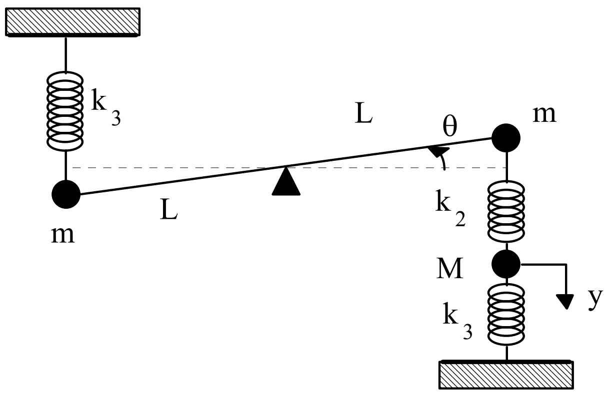
On se place dans le cas où: $k_1 = k_2 = k_3 = k$ et $m_1 = m_2 = m$. On posera:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{5k}{4m} + \frac{g}{L} \right) = \frac{2k}{m}$$

1. Calculer les pulsations propres
2. Déterminer les rapports des amplitudes de chacun des modes.
3. En déduire l'expression générale des mouvements de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
4. Donner les solutions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ si à t=0s, on a:

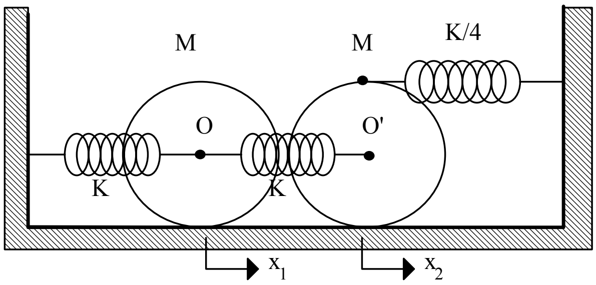
$x_1(0) = x_0, \dot{x}_1(0) = 0$ et $x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$

Exercice 3: Soit le système mécanique suivant comprenant entre autres une barre horizontale de masse négligeable et qui peut pivoter sans frottement autour d'un axe passant par son milieu. On prendra M=2m et $k_1=k_2=k_3=k$



1. Etablir les équations régissant les petites oscillations.
2. Trouver les pulsations propres et les rapports des amplitudes pour les différents modes.
3. Ecrire les solutions générales y(t) et θ(t).

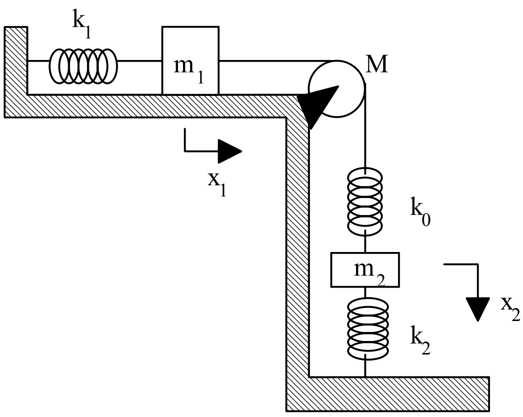
Exercice 4: On considère le système ci-contre constitué de deux cylindres identiques, homogènes, de rayon R, et de masse M. Les cylindres roulent sans glisser sur une plateforme horizontale. Les cylindres roulent sans glisser autour de leur axe O et O' auxquels sont reliés les ressorts K.



Dans le cas des faibles oscillations et en prenant les déplacements $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des centres O et O' des cylindres comme paramètres, déterminer:

1. Le Lagrangien du système.
2. Les pulsations propres du système et les rapports des amplitudes de chacun des modes.
3. Les solutions générales du mouvement sachant qu'à t=0s: $x_1 = x_2 = 0$ et $\dot{x}_1 = v_1, \dot{x}_2 = v_2$
4. Que deviennent ces solutions lorsque : a)$v_1=v_2$ et b) $v_1=-v_2$?

Exercice 5: Dans la figure ci-contre, M et R représentent respectivement la masse et le rayon de la poulie. x_1 et x_2 représentent les écarts des deux masses par rapport à leur position d'équilibre. On prend: $M=2(m_2-m_1)$ et $m_2=m$; $k_0=k_1=k_2=k$.

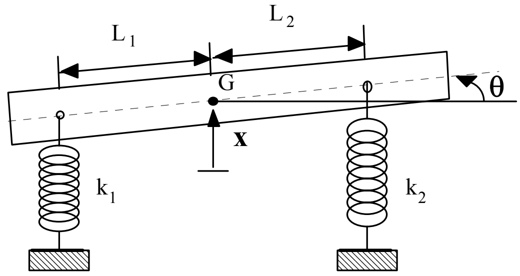


1. Ecrire le Lagrangien du système.
2. Déterminer les pulsations propres et le rapport des amplitudes de chacun des modes en fonction de m et k.

Exercice 6 :

Sur la figure ci-dessous, nous avons schématisé un véhicule avec sa suspension (sans amortisseurs). Nous supposons que les ressorts restent verticaux. La masse du véhicule est m et son moment d'inertie par rapport à un axe horizontal D passant par le centre de gravité G et perpendiculaire au plan de la figure, est J_0. Le déplacement du centre de gravité par rapport à l'équilibre est repéré par x (pompage). L'angle θ (tangage) que fait le chassis avec le sol, par rotation autour de D, sera supposé petit. L'inclinaison sur les côtés (roulis) est supposée nulle.
On donne les valeurs suivantes:

- masse du véhicule m=1000kg
- distance entre l'axe avant et G: L_1=1m
- distance entre l'axe arrière et G: L_2=1.5m
- constante de raideur du ressort avant: k_1=18kN/m
- constante de raideur du ressort arrière: k_2=18kN/m
- moment d'inertie du véhicule: $J_0=mr^2$; r=0.9m



1. Déterminer les pulsations propres du système ainsi que le rapport des amplitudes dans chacun des modes.
2. Ecrire les solutions de x(t) et θ(t).
3. a/ Quelle condition doit être réalisée si l'on désire avoir un découplage entre x et θ?
   b/ Quelles sont alors les fréquences propres de pompage f_p et de tangage f_t?

Exercice 7:

1. Déterminer les pulsations propres du circuit électrique de la figure 1 ci-dessous où M est le coefficient d'inductance mutuelle.
2. On définit le coefficient de couplage du circuit par

$$\Gamma = M \Big/ \sqrt{L_1 L_2} \quad \text{avec} \ -1 \leq \Gamma \leq 1$$

Calculer les pulsations propres en fonction de Γ pour $L_1C_1=L_2C_2$ dans les cas suivants:

a) selfs éloignées (Γ=0)

b) selfs rapprochées ($|\Gamma|=1$)

On donne L_1=1 mH et C_1=1μF.

3. Pour quelles valeurs de L_1', L_2' et L_3', le circuit électrique de la figure 2 admet les mêmes pulsations propres que le circuit précédent ?

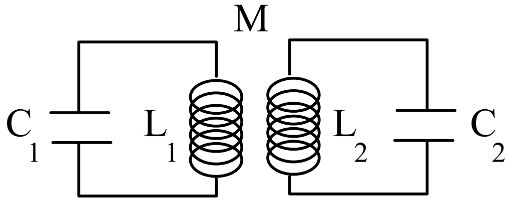


Fig.1

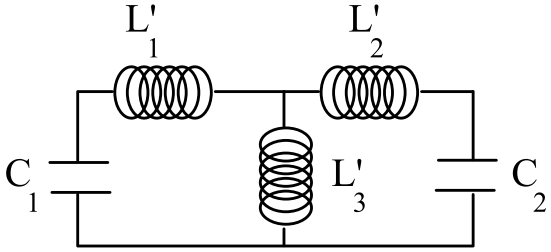


Fig.2