

# Chapitre 5

## Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté

### 5.1 Equations de Lagrange

Soit un système à deux degrés de liberté, soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel, à des forces de frottement de viscosité et des forces extérieures. Si les coordonnées généralisées sont  $q_1$  et  $q_2$ , les équations de Lagrange s'écrivent :

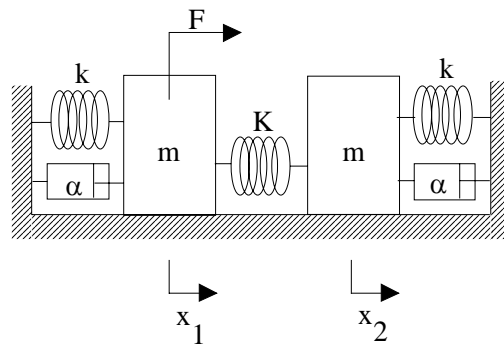
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_1} &= F_{q_1} \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_2} &= F_{q_2}\end{aligned}$$

Dans cette expression  $F_{q_1}$  et  $F_{q_2}$  sont les forces généralisées conjuguées des coordonnées généralisées respectives  $q_1$  et  $q_2$ . Elles sont respectivement définies par

- $F_{q_1} = \left. \frac{\delta W}{\delta q_1} \right|_{\substack{\delta q_1 \neq 0 \\ \delta q_2 = 0}}$ , dans cette expression  $\delta W_1$  représente le travail des forces extérieures pour une variation  $\delta q_1$  de la coordonnée  $q_1$ , lorsque  $\delta q_2 = 0$ .
- $F_{q_2} = \left. \frac{\delta W}{\delta q_2} \right|_{\substack{\delta q_1 = 0 \\ \delta q_2 \neq 0}}$ , dans cette expression  $\delta W_2$  représente le travail des forces extérieures pour une variation  $\delta q_2$  de la coordonnée  $q_2$ , lorsque  $\delta q_1 = 0$ .

### 5.2 Système masses-ressorts-amortisseurs

Pour étudier les particularités des oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté, étudions le système symétrique suivant soumis à une force horizontale  $F$ , appliquée à la première masse.



### 5.2.1 Equations différentielles

Les équations différentielles du mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + (k + K)x_1 + \alpha\dot{x}_1 - Kx_2 &= F \\ -Kx_1 + m\ddot{x}_2 + (k + K)x_2 + \alpha\dot{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$

### 5.2.2 Etude du régime permanent sinusoïdal

#### Solution permanente

La solution générale de système d'équations différentielles est égale à la solution de la solution du système homogène et d'une solution particulière. La solution de l'équation homogène, en raison de l'amortissement, tend vers zéro lorsque le temps augmente. Lorsque le régime permanent s'établit, la solution devient égale à la solution permanente et s'écrit alors :

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 \cos(\Omega t + \phi_1) \\ x_2 &= X_2 \cos(\Omega t + \phi_2) \end{aligned}$$

Pour calculer les amplitudes  $X_1$  et  $X_2$ , ainsi que les phases  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , utilisons la méthodes des nombres complexes. On peut ainsi écrire :

$$x_1 = \text{Re}(\underline{X}_1 e^{j\Omega t}) \quad x_2 = \text{Re}(\underline{X}_2 e^{j\Omega t}) \quad F = \text{Re}(\underline{F} e^{j\Omega t})$$

Dans ces expressions les amplitudes complexes sont définies par

$$\underline{X}_1 = X_1 e^{j\phi_1} \quad \underline{X}_2 = X_2 e^{j\phi_2} \quad \underline{F} = F_0 e^{j0}$$

Dans ce cas les équations différentielles se transforment en équations algébriques :

$$\begin{cases} (k + K - m\Omega^2 + j\alpha\Omega)\underline{X}_1 - K\underline{X}_2 = \underline{F} \\ -K\underline{X}_1 + (k + K - m\Omega^2 + j\alpha\Omega)\underline{X}_2 = 0 \end{cases}$$

### Amortissement négligeable

Considérons d'abord le cas d'un amortissement suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que  $\alpha \simeq 0$ . Le système d'équations différentielles s'écrit alors

$$\begin{cases} (k + K - m\Omega^2) \underline{X}_1 - K \underline{X}_2 = \underline{F} \\ -K \underline{X}_1 + (k + K - m\Omega^2) \underline{X}_2 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont :

$$\begin{aligned} \underline{X}_1 &= \frac{\underline{F}}{m} \frac{(\Omega_A^2 - \Omega^2)}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)} \\ \underline{X}_2 &= \frac{K \underline{F}}{m^2} \frac{1}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)} \end{aligned}$$

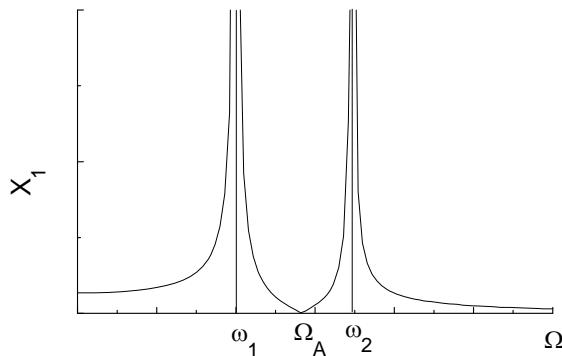
Les pulsations  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$  sont les pulsations propres calculées au chapitre précédent. La valeur de la pulsation  $\Omega_A$  est :

$$\Omega_A = \sqrt{\frac{k+K}{m}}$$

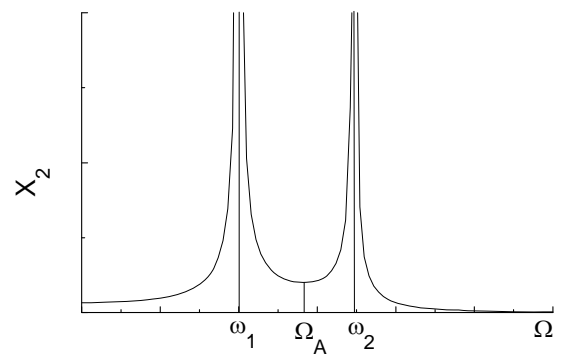
Les amplitudes des déplacements  $X_1$  et  $X_2$  sont alors données par

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\underline{F}}{m} \frac{|\Omega_A^2 - \Omega^2|}{|\omega_1^2 - \Omega^2| |\omega_2^2 - \Omega^2|} \\ X_2 &= \frac{K \underline{F}}{m^2} \frac{1}{|\omega_1^2 - \Omega^2| |\omega_2^2 - \Omega^2|} \end{aligned}$$

Les variations des amplitudes  $X_1$  et  $X_2$  sont représentées sur les figures ci-dessous



Variation de  $X_1$  en fonction de  $\Omega$



Variation de  $X_2$  en fonction de  $\Omega$

On remarque que le phénomène de résonance se produit pour  $X_1$  comme pour  $X_2$  lorsque la pulsation d'excitation  $\Omega$  est égale à l'une des pulsations propres  $\omega_1$  ou  $\omega_2$  du système. L'amortissement étant très faible, les amplitudes à la résonance sont très importantes. Lorsque la pulsation  $\Omega$  devient très grande, ces amplitudes tendent vers zéro. Enfin lorsque  $\Omega = \Omega_A$ , l'amplitude  $X_1$  est égale à zéro ; pour cette raison, la pulsation  $\Omega_A$  est appelée pulsation d'antirésonance.

## 5.3 Impédance

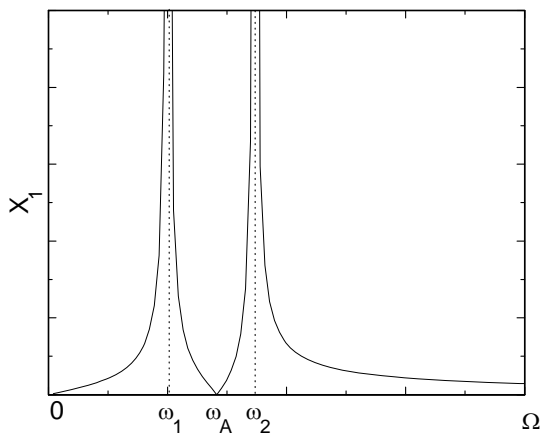
Considérons le système à deux degrés de liberté étudié dans le paragraphe précédent dans lequel nous supposons que l'amortissement est nul ( $\alpha \simeq 0$ ). En régime stationnaire, on obtient pour l'amplitude complexe de la vitesse  $\underline{\dot{X}}_1$  :

$$\underline{\dot{X}}_1 = -j \frac{\Omega}{m} \frac{\Omega^2 - \Omega_A^2}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} F$$

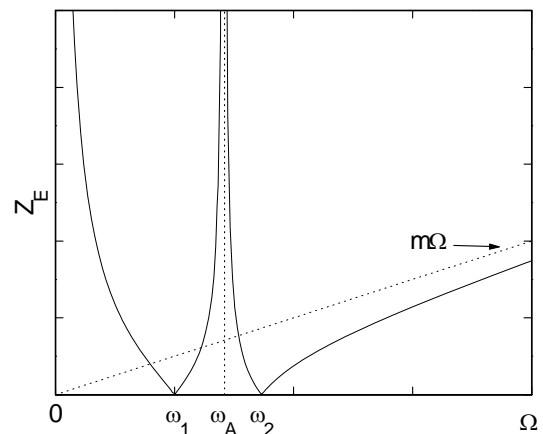
On en déduit l'impédance d'entrée :

$$\underline{Z}_E = \frac{F}{\underline{\dot{X}}_1} = j \frac{m}{\Omega} \frac{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}{\Omega^2 - \Omega_A^2}$$

Les figures ci-dessous donnent les variations de  $\dot{X}$  et  $Z_E$  en fonction de  $\Omega$ . On note le phénomène de résonance lorsque la pulsation d'excitation  $\Omega$  est égale à l'une des deux pulsations propres  $\omega_1$  ou  $\omega_2$ . A ces pulsations, le module de l'impédance d'entrée est nul. Enfin, lorsque  $\Omega$  est égale à la pulsation d'antirésonance  $\Omega_A$ , la vitesse de la première masse est nulle et le module de l'impédance d'entrée est infini. Lorsque  $\Omega \rightarrow \infty$ ,  $Z_E \simeq m\Omega$ .



Variation de  $|\underline{\dot{X}}_1|$  en fonction de  $\Omega$



Variation de  $|\underline{Z}_E|$  en fonction de  $\Omega$

## 5.4 Application

Le phénomène d'antirésonance peut être avantageusement utilisé pour supprimer une vibration résultant d'une résonance dans un système mécanique.

Considérons le système à deux degrés de liberté de la figure ci-dessous. Les équations différentielles du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + (k + K)x_1 - Kx_2 = F \\ -Kx_1 + m\ddot{x}_2 + Kx_2 = 0 \end{cases}$$

