

Chapitre 7

Cordes vibrantes

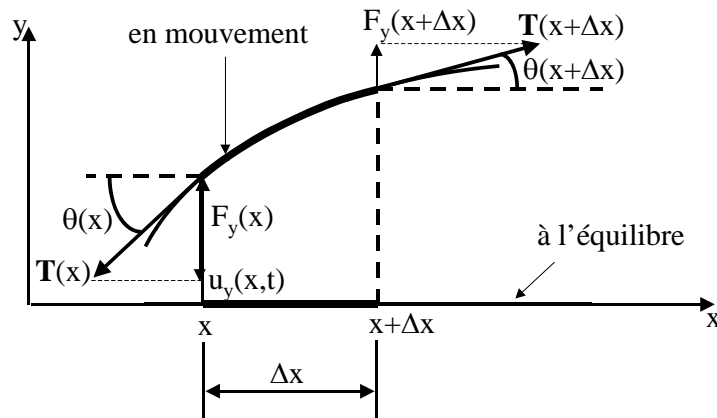
7.1 Equation des ondes

Considérons une corde tendue, rectiligne selon la coordonnée x , et de longueur infinie. Nous allons étudier la propagation d'un faible ébranlement le long de la corde. Supposons que cet ébranlement se produise suivant l'axe Oy .

Étudions l'équation du mouvement de cette corde. Nous dénoterons par T la tension à laquelle est soumise la corde. On considère en un point d'abscisse x un segment très court de cette corde, de longueur Δx . La masse Δm du segment est donnée par :

$$\Delta m = \mu \Delta x$$

où μ est la densité linéique de masse de la corde, c'est-à-dire la masse par unité de longueur qui s'exprime en kg/m .



Corde vibrant transversalement

Dans une situation hors équilibre, le segment n'est plus droit, il présente une courbure. Nous considérons des mouvements d'oscillation de la corde de petite amplitude

$$\vec{u}(x, t) = u(x, t) \vec{e}_y$$

si bien que nous pouvons faire l'approximation :

$$\sin(\theta)|_x = \tan(\theta)|_x = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x$$

$$\sin(\theta)|_{x+\Delta x} = \tan(\theta)|_{x+\Delta x} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}$$

Cette approximation néglige aussi l'allongement du segment, et considère donc la tension T comme constante. La force appliquée sur le segment dans la direction y est la résultante de la force appliquée au point x , qui est une force appliquée vers le bas et égale en module à

$$F(x, t) = T \sin(\theta)|_x \cong T \tan(\theta)|_x = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x$$

et de la force appliquée au point $x+\Delta x$ qui est vers le haut et égale à

$$F(x + \Delta x, t) = T \sin(\theta)|_{x+\Delta x} \cong T \tan(\theta)|_{x+\Delta x} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}$$

La force totale dans la direction y est donc :

$$R = F(x + \Delta x, t) - F(x, t) = T \left[\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x \right] = T \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x$$

Nous pouvons appliquer maintenant la loi fondamentale de la dynamique au segment Δx . La force dans la direction y doit être égale au produit de la masse Δm du segment par l'accélération de celui-ci. Donc :

$$R = \Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Si on définit $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ qui a la dimension d'une vitesse, on constate que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

qui est l'équation d'ondes de la corde. V qui est la vitesse de propagation de cette onde.

7.2 Ondes progressives harmoniques

7.2.1 Définition

Une onde progressive harmonique se propageant selon Ox est définie par :

$$u(x, t) = U_0 \cos(\omega t - kx)$$

ou encore en notation complexe

$$u(x, t) = U_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

où $k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le module du vecteur d'onde, λ étant la longueur d'onde.

7.2.2 Force en un point

On appelle force en un point, la projection selon Oy de la force exercée, en ce point, par la partie gauche de la corde sur la partie droite :

$$F = -T \frac{\partial u}{\partial x}$$

Dans le cas d'une onde progressive sinusoïdale, cette relation devient :

$$F(x, t) = jkT U_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

La vitesse de particules s'écrit :

$$\dot{u}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} = j\omega U_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

On constate que pour une onde progressive la vitesse de particules \dot{u} est en phase avec la force F .

7.2.3 Impédance

On appelle impédance en un point le rapport de l'amplitude complexe de la force à l'amplitude complexe de la vitesse de particule

$$Z(x) = \frac{F_y}{\dot{u}_y}$$

Dans le cas d'une onde progressive, on obtient :

$$Z(x) = \mu V = \sqrt{\mu T}$$

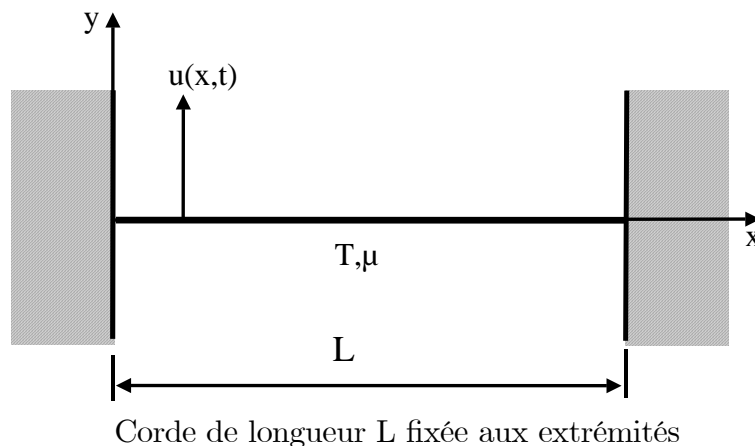
La quantité $\sqrt{\mu T}$ définit l'impédance caractéristique de la corde

$$Z_c = \sqrt{\mu T} = \mu V$$

On obtient une propriété de l'onde progressive plane

$$Z(x) = Z_c \quad \forall x$$

7.3 Oscillations libres d'une corde de longueur finie



Considérons une corde de longueur L fixe aux points $x = 0$ et $x = L$. Recherchons une solution de l'équation d'onde sous la forme :

$$u(x, t) = g(x) f(t)$$

En remplaçant dans l'équation de propagation, on obtient :

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{1}{V^2} \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dt^2}$$

Le membre de gauche de cette équation ne dépend que de x , tandis que le membre de droite ne dépend que de t . Ces deux expressions sont donc égales à une constante qui doit être un nombre réel négatif que nous posons égal à $-k^2$ car la solution ne doit pas tendre vers l'infini lorsque t tend vers l'infini. Posons $\omega = kV$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g}{dx^2} &= -k^2 g \\ \frac{d^2 f}{dt^2} &= -\omega^2 f \end{aligned}$$

Les solutions de ces deux équations différentielles sont de la forme :

$$\begin{aligned} f &= A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \\ g &= C \cos(kx) + D \sin(kx) \end{aligned}$$

La solution de l'équation d'onde peut alors s'écrire sous la forme :

$$u(x, t) = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] [C \cos(kx) + D \sin(kx)]$$

Tenant compte des conditions aux limites

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ u(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} C &= 0 \\ k &= n \frac{\pi}{L} \quad \text{o} \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

La solution de l'équation d'onde qui satisfait ces conditions aux limites est donc une somme d'une infinités de termes :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x)$$

avec

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_n = k_n V = n \frac{\pi V}{L}$$

Les ω_n sont les pulsations propres. Les coefficients a_n et b_n sont déterminés par les conditions initiales du mouvement. Supposons qu'à $t = 0$ nous imposons à la corde une certaine forme initiale $u(x, 0) = u_0(x)$ et une vitesse initiale

$$\dot{u}(0, t) = v_0(t)$$

Dans ce cas nous aurons les conditions initiales suivantes :

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(k_n x)$$

$$v_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\omega_n b_n \sin(k_n x)$$

On doit inverser ces équations pour obtenir les coefficients a_n et b_n . La méthode de Fourier consiste à les multiplier par $\sin(k_m x)$ et les intégrer entre 0 et L . Si on utilise les intégrales :

$$\int_0^L \sin\left(m \frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{L}{2} & \text{si } m = n \end{cases}$$

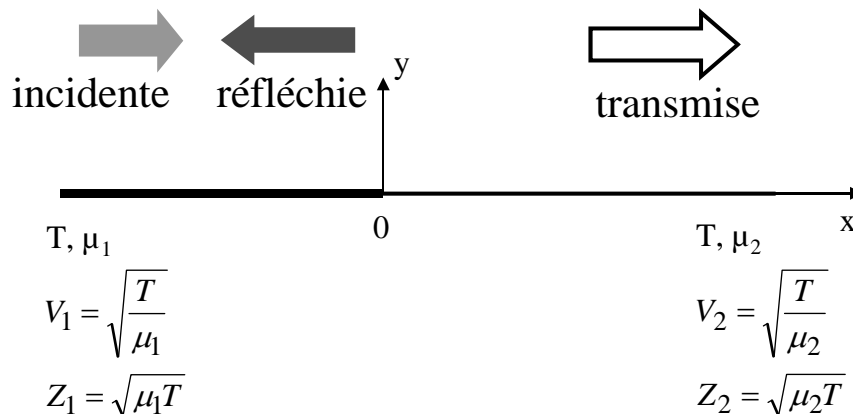
on obtient

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = -\frac{2}{\omega_n L} \int_0^L v_0(x) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) dx$$

7.4 Réflexion et transmission

7.4.1 Réflexion et transmission entre deux cordes semi-infinies



Réflexion transmission dans deux cordes semi-infinies

Soit deux cordes de longueur semi-infinie, reliées en $x = 0$. Leurs masses linéiques sont respectivement μ_1 et μ_2 . Lorsqu'une onde venant de $-\infty$ se propage vers $x = 0$ dans la première corde, elle donne naissance au point de jonction, $x = 0$, à une onde réfléchie et une onde transmise. L'écriture de la continuité du déplacement et de la force en $x = 0$ permet d'obtenir le coefficient de réflexion R_u et le coefficient de transmission T_u définis respectivement par :

$$R_u = \frac{U_R}{U_i}$$

$$T_u = \frac{U_T}{U_i}$$

