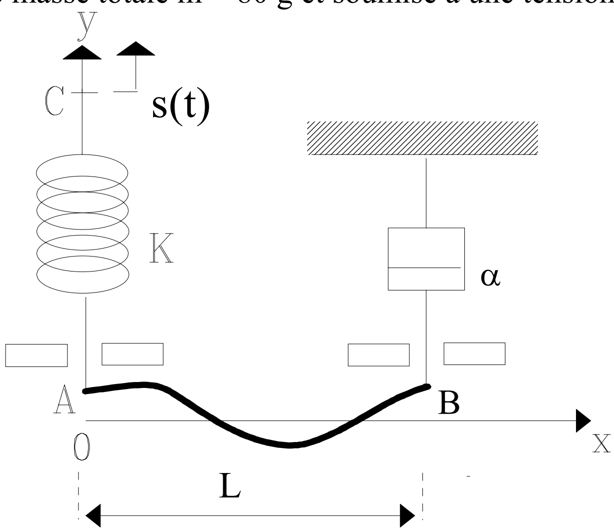
CORDES VIBRANTES

Exercice 1 :

Soit une corde de longueur L = 2 m, de masse totale m = 80 g et soumise à une tension T réglable. Comme indiqué sur la figure ci-contre, elle est fixée en A , à un ressort vertical de raideur K dont l'extrémité C subit un déplacement forcé vertical sinusoidal de fréquence f = 50 Hz, d'amplitude s_0 = 1 cm et décrit par:

$$s(t) = s_0 \exp(j2\pi ft)$$



La seconde extrémité B (x = L) de la corde est fixée à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α égal à 0,2 N.s/m. Des guides parfaitement glissants n'autorisent que les mouvements verticaux (transverses) des points A, B et C. Le mouvement d'un point M quelconque d'abscisse x sur la corde est alors représenté par son élongation $u_y(x,t)$. La tension T est réglée de telle sorte qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie en B.

1/ Que représente l'amortisseur par rapport à la corde? Calculer l'impédance en un point quelconque de la corde. En déduire la tension T de la corde.

2/ En déduire la vitesse de phase V et la longueur d'onde λ.

3/ Montrer que les extrémités A et B vibrent en phase.

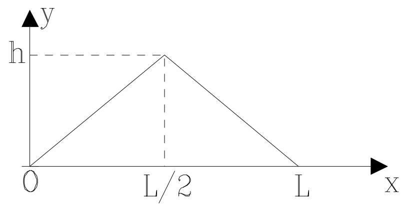
4/ Quelle est la valeur de l'impédance de la corde au point A. Calculer l'amplitude et la phase ϕ de l'élongation $u_y(x\,,t)$ du point A. En déduire l'expression de l'élongation $u_y(x,t)$ d'un point quelconque de la corde. Dans quel cas la phase ϕ est nulle? Que vaut, dans ce cas, l'amplitude de vibration de chaque point de la corde ?

Exercice 2 :

Une corde de longueur l = 2m et de masse = 10g est tendue entre deux points fixes avec une tension T = 10N. Calculer les fréquences propres des oscillations transversales. Dessiner la corde lorsqu'elle oscille dans le mode fondamental et dans les trois premiers harmoniques.

Exercice 3 :

Une corde de longueur L et de masse m est tendue entre deux points fixes avec une tension T. A l'instant $t = 0$, la corde est pincée en son milieu, écartée par rapport à l'horizontale d'une distance h puis lâchée sans vitesse initiale. Les positions $y(x,0)$ des différents points de la corde, à l'instant $t = 0$, sont représentés sur la figure ci-contre. Ces positions sont données par la relation :



$$\begin{cases} y(x,0) = \dfrac{2h}{L}x & \text{pour } 0 \le x \le L/2 \\ y(x,0) = \dfrac{2h}{L}(L-x) & \text{pour } L/2 \le x \le L \end{cases}$$

1/ Montrer que :

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(k_n x) \qquad \text{avec } k_n = n\frac{\pi}{L}$$

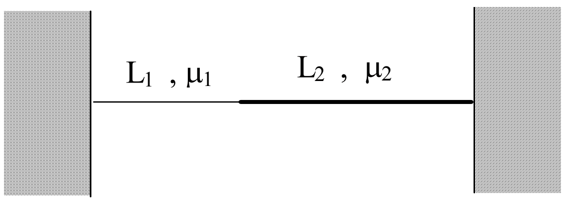
2/ Montrer que les amplitudes des modes propres d'indice n sont données par :

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L y(x,0)\ \sin(k_n x)\ dx$$

3/ Ecrire l'expression de $y(x,t)$ en se limitant aux trois premiers harmoniques.

Exercice 4 :

Une corde constituée de deux segments disposés bout à bout est fixée à ses deux extrémités et tendue avec une tension T (voir figure a). L_1 et L_2 désignent les longueurs des deux segments de corde; μ_1 et μ_2 représentent les masses linéiques de chaque segment de la corde. La corde est le siège de vibrations transversales polarisées rectilignement.

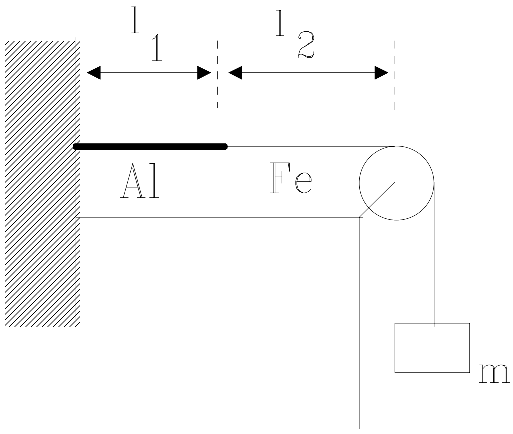


1/ Ecrire les conditions aux limites.

2/ En déduire l'équation aux pulsations propres.

Exercice 5 :

Un fil d'aluminium de longueur l_1 = 60,0 cm et de section droite s = 1,0 x 10^{-2} cm^2 est fixé à un fil de fer de même section. Le fil mixte, attaché à un bloc m de 10,0 kg, est disposé tel qu'indiqué sur la figure, de telle sorte que la distance de la jonction à la poulie est l_2 = 86,6 cm. La densité de l'aluminium est ρ_1 = 2,60 g/cm^3, et celle du fer est ρ_2 = 7,80 g/cm^3 .

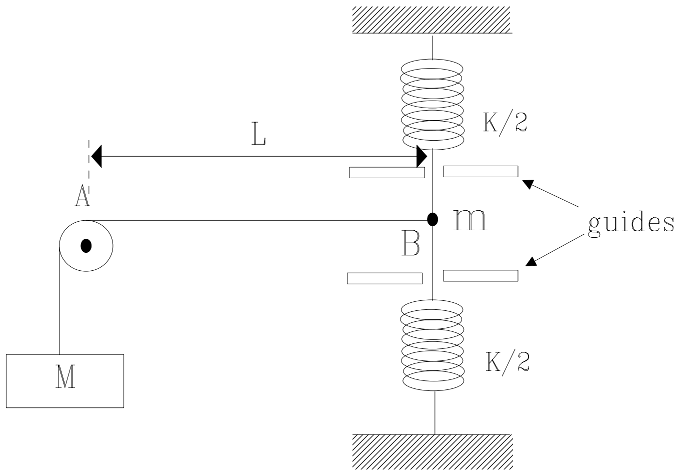


a/ Trouver la fréquence propre de vibration transversale la plus basse et pour laquelle la jonction des fils est un noeud.

b/ Quel est le nombre total de noeuds qu'on peut remarquer à cette fréquence, si ceux des extrêmités du fil ne sont pas comptés?

Exercice 6 :

Une corde de masse linéique μ est tendue, à l'aide d'une masse M, entre deux points A et B tels que AB = L. Le point A est fixe. Au point B, la corde est terminée par une masse m tenue par deux ressorts verticaux identiques de raideur K/2 (figure ci-contre). Des guides parfaitement glissants n'autorisent que les déplacements verticaux de la masse m. A l'équilibre, la corde AB est horizontale.



1/ Vibrations libres:

a/ Montrer qu'en régime de vibration harmonique la corde AB peut être considérée comme un milieu limité par deux impédances Z_A et Z_B que l'on déterminera.

b/ Calculer les coefficients de reflexion r_A (au point A) et r_B (au point B). Donner leurs modules R_A et R_B ainsi que leur argument θ_A et θ_B .

c/ Après avoir écrit les conditions aux limites en A et en B, établir l'équation aux pulsations propres de vibration de la corde.

2/ Vibrations forcées:

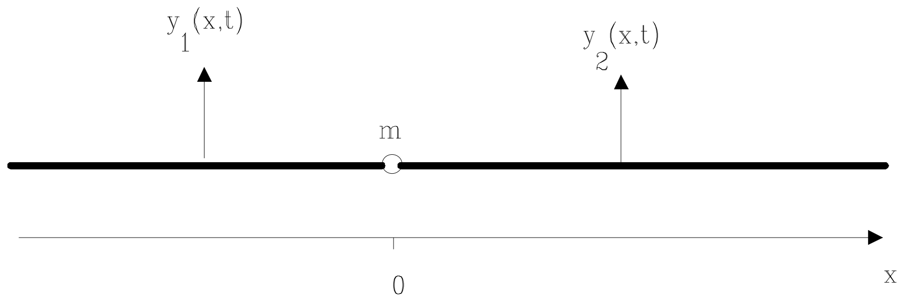
On impose au point A une vibration transversale, sinusoidale de pulsation ω et d'amplitude S_0 . La tension de la corde est la même que précédemment.

a/ Calculer l'amplitude de vibration de chaque point de la corde. Quelle est l'amplitude de vibration ainsi que la position des ventres et des noeuds de vibration? En déduire les valeurs de la pulsation ω pour mettre en résonance la corde. Les comparer aux valeurs des pulsations propres obtenues dans la question précédente.

b/ La pulsation d'excitation ω est égale à $\sqrt{k/m}$, calculer dans ce cas l'impédance d'entrée de la corde en A et en déduire l'amplitude de la force que l'on doit appliquer en A pour obtenir l'amplitude S_0.

Exercice 7 :

Une corde de longueur infinie de masse linéique μ est soumise à une tension T. Au point x = 0, on accroche une masse m. Au repos, la corde est parallèle à l'axe Ox (voir figure ci-contre).On néglige le poids de la corde ainsi que le poids de la masse m. On étudie les petits déplacements.



Une onde incidente de déplacement $y_i(x,t)$ de pulsation ω et d'amplitude a_0 arrive de $-\infty$ et se propage dans le sens des x croissants.

1/ Ecrire l'expression de $y_1(x,t)$ pour la partie des $x < 0$ et $y_2(x,t)$ pour la partie des $x > 0$ en fonction des données du problème et des coefficients de réflexion **r** et transmission **t** en déplacement au point O.

2/ Montrer que la force transverse agissant sur la masse m vaut:

$$F_y(0,t) = T\left[\frac{\partial y_2}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial y_1}{\partial x}(0,t)\right]$$

3/ En tenant compte de la continuité de la corde en x = 0 et à l'aide de la relation fondamentale de la dynamique appliquée à m, montrer que le coefficient de réflexion **r**, en x = 0, vaut:

$$\mathbf{r} = -\frac{jm\omega}{jm\omega + 2\,Z_C} \qquad \text{avec} \quad Z_C = \sqrt{\mu T}$$

Que représente le terme $jm\omega$?

4/ Démontrer que le système est équivalent à une corde s'étendant de $-\infty$ à 0 et terminée en ce point par une impédance Z (0) qui s'écrit:

$$Z(0) = jm\omega + Z_C$$

En déduire le coefficient de reflexion r, en x = 0, en fonction de Z_C et Z(0). Retrouve-t-on le résultat de la question précédente ?

5/ Calculer le module R et l'argument θ du coefficient de reflexion. Montrer que le module de **r** est toujours inférieur à 1. Quelles sont les valeurs limites de **r** lorsque $m \rightarrow 0$ et $m \rightarrow \infty$? Commenter.

6/ Calculer la position et l'amplitude des minima et des maxima de vibration pour la partie des $x < 0$. En déduire le taux d'ondes stationnaires. Quelle distance sépare la masse m du maximum le plus proche de x = 0 ? Que deviennent ces résultats lorsque $m \rightarrow 0$ et $m \rightarrow \infty$?