

Chapitre 9

Propagation d'une onde électrique dans une ligne coaxiale

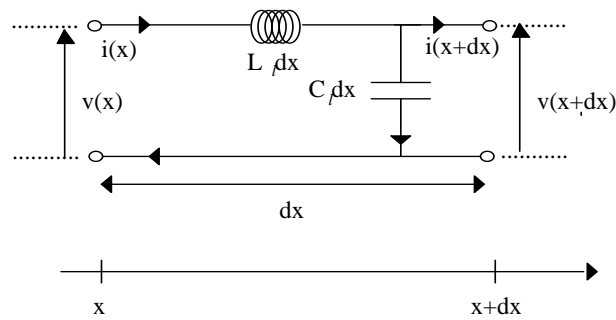
9.1 Introduction

Lors de l'étude des circuits électriques, en régime sinusoïdal forcé, on considère habituellement que dans une branche quelconque du circuit, le courant électrique est le même en tout point et ne dépend que du temps. Cette hypothèse n'est valable que si la longueur d'onde associée au courant sinusoïdal est grande devant les dimensions du circuit ; par exemple pour une fréquence $f = 50Hz$, la longueur d'onde correspondante est $\lambda = c/f \approx 6000km$, où c est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ($c = 3 \times 10^8 m \cdot s^{-1}$). Cette hypothèse revient de façon équivalente à négliger le temps de propagation de l'onde électromagnétique (propagation de vitesse infinie).

Si λ est du même ordre de grandeur des dimensions du circuit, cette approximation n'est plus valable ; par exemple si $f \approx GHz$, $\lambda \approx 30cm$ qui est alors comparable aux dimensions des circuits ou des fils couramment utilisés dans les réseaux électriques à l'échelle du laboratoire. Dans ce cas, il faut tenir compte de la vitesse finie des ondes électromagnétiques.

9.2 Equation de propagation

Un câble possède une capacité par unité de longueur C_l et une autoinductance par unité de longueur L_l . Nous supposons que ce câble, que nous appelons ligne, est rectiligne et que la position de chaque point est repérée par son abscisse x . Soit un élément de câble situé en x et de faible longueur dx . Il possède une capacité $C_l dx$ et une inductance $L_l dx$. Cet élément de câble est représenté, à un instant t , par le schéma ci-dessous.



cellule élémentaire

1. L'écriture des lois de Kirchhoff permet d'établir les relations suivantes :

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -L_l \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -C_l \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$$

A partir de ces deux relations, on peut établir les équations de propagation de la tension v et du courant i :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

Dans ces deux équations, $V = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}}$ est la vitesse de propagation de l'onde électrique dans le câble .

9.3 Solution de l'équation de propagation

On peut vérifier que les fonctions $f\left(t - \frac{x}{V}\right)$ et $g\left(t + \frac{x}{V}\right)$ sont deux solutions de l'équation de propagation. La solution de l'équation de propagation s'écrira donc généralement sous la forme :

$$v(x, t) = f\left(t - \frac{x}{V}\right) + g\left(t + \frac{x}{V}\right)$$

La fonction $f\left(t - \frac{x}{V}\right)$ correspond à une onde progressive se propageant dans le sens des x croissant tandis que $g\left(t + \frac{x}{V}\right)$ correspond à une onde se propageant dans le sens des x décroissant.

9.4 Onde Progressive sinusoïdale

9.4.1 Définition

Lorsque $g\left(t + \frac{x}{V}\right) \equiv 0$, la tension électrique en un point d'abscisse x est donnée par :

$$v(x, t) = f\left(t - \frac{x}{V}\right)$$

Dans ce cas, on dit qu'une onde progressive se propage dans le câble.

Lorsque la fonction $f\left(t - \frac{x}{V}\right)$ est une fonction sinusoïdale, l'onde progressive est dite sinusoïdale ou harmonique :

$$v(x, t) = v_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right]$$

On peut encore écrire

$$v(x, t) = v_0 \cos[\omega t - kx]$$

où $k = \frac{\omega}{V}$ (Relation de dispersion).

En utilisant la notation complexe :

$$v(x, t) = \operatorname{Re}\left[v_0 e^{j[\omega t - kx]}\right] = \operatorname{Re}\left[\bar{v} e^{j\omega t}\right]$$

où l'amplitude complexe est définie par :

$$\bar{v} = v_0 e^{-jkx}$$

De même, on peut obtenir l'expression de l'intensité en fonction du temps t et de la position x :

$$i(x, t) = i_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$i(x, t) = \operatorname{Re}\left[\bar{i} e^{j\omega t}\right]$$

où l'amplitude complexe du courant est définie par la relation :

$$\bar{i} = i_0 e^{-jkx}$$

avec $i_0 = \frac{v_0}{\sqrt{\frac{L_l}{C_l}}}$.

9.4.2 Impédance en un point

L'impédance en un point est définie par le rapport :

$$\bar{Z}(x) = \frac{\bar{v}}{\bar{i}}$$

Dans le cas d'une onde progressive, l'impédance est un nombre réel égal à

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}$$

et ne dépend pas de x . Cette impédance est appelée impédance caractéristique ou impédance itérative du câble.