

Chapitre 10

Eléments d'analyse vectorielle

10.1 Champ scalaire - Champ vectoriel

Soit un trièdre orthonormé $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et M un point de l'espace, de coordonnées (x, y, z) :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

La fonction $f(M)$ est dite fonction scalaire de point ou champ scalaire si :

$$f(M) = f(x, y, z)$$

Le vecteur $\vec{v}(M)$ est dit fonction vectorielle de point ou champ vectoriel si :

$$\vec{v}(M) = V_x(x, y, z) \vec{e}_x + V_y(x, y, z) \vec{e}_y + V_z(x, y, z) \vec{e}_z$$

10.2 Gradient d'un champ scalaire

Le gradient (noté \overrightarrow{grad}) est défini à partir d'une fonction scalaire de point et a pour composantes suivant \vec{e}_x, \vec{e}_y , et \vec{e}_z les dérivées partielles de $f(M)$ par rapport à x, y et z respectivement :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

10.3 Divergence d'un champ vectoriel

La divergence (notée div) n'est définie qu'à partir d'une fonction vectorielle $\vec{v}(M)$ de point et donne une fonction scalaire de point définie, en coordonnées cartésiennes par :

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

10.4 Rotationnel d'un champ vectoriel

Le rotationnel noté (\overrightarrow{rot}) d'un champ vectoriel donne une fonction vectorielle de point définie en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$$

10.5 Laplacien scalaire

Le laplacien scalaire d'une fonction scalaire de point (noté lap ou Δ) est par définition un champ scalaire défini par :

$$lap(f) = \Delta f = div \left[\overrightarrow{grad}(f) \right]$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, il s'écrit :

$$lap(f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

10.6 Laplacien vectoriel

Le laplacien vectoriel (noté \overrightarrow{lap} ou $\overrightarrow{\Delta}$) d'un champ vectoriel \vec{v} est un champ vectoriel défini par :

$$\overrightarrow{lap}(\vec{v}) = \overrightarrow{\Delta}(\vec{v}) = \overrightarrow{grad}[div(\vec{v})] - \overrightarrow{rot}[\overrightarrow{rot}(\vec{v})]$$

Dans le cas d'un système de coordonnées cartésiennes, le laplacien vectoriel a pour composantes :

$$\overrightarrow{lap}(\vec{v}) \left\{ \begin{array}{l} \Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \Delta v_y = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \Delta v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

10.7 Opérateur nabla

Pour écrire de manière plus compacte les opérateurs vectoriels précédemment définis, on introduit un vecteur symbolique appelé opérateur nabla et défini par :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Les opérateurs vectoriels s'écrivent parfois à l'aide de l'opérateur nabla sous les formes respectives suivantes :

- le gradient d'un champ scalaire f est noté

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

- la divergence d'un champ vectoriel est notée

$$div(\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- le rotationnel d'un champ vectoriel est noté

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] \vec{e}_z$$

– le laplacien scalaire d'un champ scalaire est noté

$$\text{lap}(f) = \Delta f = \text{div} [\overrightarrow{\text{grad}}(f)] = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \nabla^2(f)$$

∇^2 se lit "del de".

– le laplacien vectoriel d'un champ vectoriel est noté

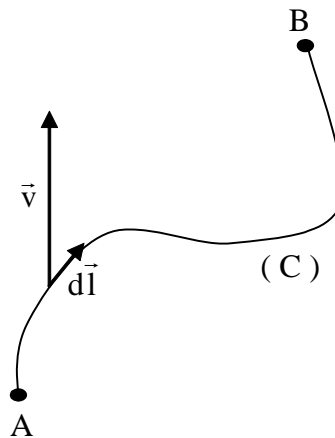
$$\overrightarrow{\text{lap}}(\vec{v}) = \vec{\Delta}(\vec{v}) = \overrightarrow{\text{grad}}[\text{div}(\vec{v})] - \overrightarrow{\text{rot}}[\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})] = \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}) - \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{v}]$$

10.8 Théorème de Stokes-Théorème de Gauss

10.8.1 Circulation d'un champ vectoriel

On définit la circulation d'un vecteur \vec{v} le long d'un contour (C) , par l'intégrale curviligne :

$$C_{\overrightarrow{AB}}(\vec{v}) = \int_{\overrightarrow{AB}} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$



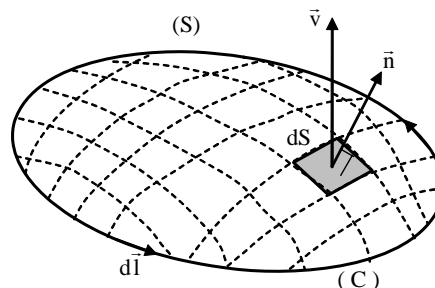
La circulation de long d'un contour fermé est notée :

$$C(\vec{v}) = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

10.8.2 Flux d'un champ vectoriel

On définit le flux d'un vecteur \vec{v} à travers une surface (S) par l'intégrale double :

$$\phi_{/(S)}(\vec{v}) = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$



Lorsque la surface (S) est fermée, le vecteur unitaire \vec{n} est dirigé de l'intérieur vers l'extérieur.

