EQUATIONS DE LAGRANGE

DEGRES DE LIBERTE ET COORDONNEES GENERALISEES

Exercice 1 : On considère un point matériel astreint à se déplacer sur un cercle de rayon R et de centre 0 contenu dans le plan xOy.
1) Traduire la liaison par une ou des relations mathématiques; quel est le nombre de degrés de liberté de ce point?
2) Quelles sont les coordonnées généralisées que l'on peut utiliser pour repérer ce point?

Exercice 2 : On considère un point matériel astreint à se déplacer sur une sphère. Répondre aux mêmes questions que l'exercice précédent.

Exercice 3 : Pour repérer la position d'un solide dans l'espace, il faut repérer la position de trois points non alignés A, B et C de ce solide.
1) Traduire les liaisons physiques par des relations mathématiques; quel est le nombre de degrés de liberté de ce solide?
2) Quelles sont les coordonnées généralisées les plus couramment utilisées pour décrire le mouvement d'un solide?
3) Quel est le nombre de degrés de liberté pour un solide qui possède : a) un point fixe? b) deux points fixes?

Exercice 4 : On considère une haltère constituée de deux masses identiques m, supposées ponctuelles, reliées par une tige de longueur a, de diamètre et de masse négligeables.
1) Comment s'écrit mathématiquement la liaison entre les deux masses?
2) Quel est le nombre de degrés de liberté de ce système?

EQUATIONS DE LAGRANGE POUR LES SYSTEMES CONSERVATIFS

Exercice 5 : On considère une masse M qui glisse sans frottement selon une droite sur un plan horizontal. Elle est reliée à un bâti fixe par un ressort parfait de raideur k, colinéaire avec la trajectoire.
1) Quel est le nombre de degrés de liberté ?
2) Quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse M. Quelles sont celles qui dérivent d'un potentiel ? Quelles sont celles qui ne travaillent pas ?
3) Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de ce système; en déduire l'équation différentielle du mouvement par la méthode des équations de Lagrange.
4) Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant la seconde loi de Newton; que remarque-t-on ? Quelles sont les forces qui n'interviennent pas dans l'équation de Lagrange et qui sont prises en compte dans les équations de Newton ? Quelle est leur particularité ?

Exercice 6 : On considère un pendule simple constitué d'une masse m reliée à un point fixe O par un fil de longueur l et de masse négligeable. Cette masse peut osciller librement dans le plan vertical xOy.

1) Quel est le nombre de degrés de liberté de ce système? Quelles sont les coordonnées généralisées les plus pratiques à utiliser? Ecrire les coordonnées x et y de la masse m dans le repère xOy en fonction des coordonnées généralisées choisies.
2) Quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse m. Quelles sont celles qui dérivent d'un potentiel? Quelles sont celles dont le travail n'est pas nul au cours du mouvement?
3) Etablir les équations du mouvement par la méthode des équations de Lagrange.
4) Ecrire les équations du mouvement par la méthode de Newton; retrouve-t-on le même résultat que par la méthode de Lagrange? Déterminer le module de l'action du fil sur la masse m; pouvait-on déterminer ce module par la méthode de Lagrange? Commenter le résultat.

Exercice 7 : Etudier le mouvement d'un cylindre de masse M et de rayon R, qui roule sans glisser le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné qui fait un angle θ avec l'horizontale.

EQUATIONS DE LAGRANGE POUR LES SYSTEMES NON CONSERVATIFS

Exercice 8 : Etudier à l'aide des équations de Lagrange, le mouvement d'une masse M qui glisse sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale, avec un coefficient de frottement de glissement μ. La masse est soumise de plus à une force F(t) parallèle au plan incliné.

Exercice 9 : Etudier, à l'aide des équations de Lagrange, le mouvement d'un cylindre de masse M et de rayon R autour de son axe de révolution fixé horizontalement, entraîné en rotation par l'action de forces extérieures dont le moment par rapport à l'axe de rotation est M(t).

Exercice 10 : Une particule de masse m est lâchée sans vitesse initiale dans un fluide caractérisé par un coefficient de frottement visqueux α. Etudier son mouvement à l'aide des équations de Lagrange.

Exercice 11 : Etablir l'équation différentielle du mouvement, dans un plan vertical, d'une masse ponctuelle m reliée à un point O par une tige de longueur R et de masse négligeable. La masse est soumise à une force F(t) qui reste perpendiculaire à la tige lors du mouvement. Les forces de frottement de viscosité peuvent être ramenées à une force $\vec{f}(t) = -\alpha\,\vec{v}$ appliquée à la masse m dont la vitesse instantanée est $\vec{v}$. Le coefficient de frottement visqueux α est supposé constant.