Chapitre 1

Introduction aux équations de Lagrange

1.1 Equations de Lagrange pour une particule

1.1.1 Equations de Lagrange

Considérons le cas particulier d'une particule astreinte à se déplacer, sans frottement, sur une courbe plane contenue dans le plan xOy. La courbe sur laquelle est astreinte se déplacer la particule de masse m, est le lieu des points dont les coordonnées vérifient les relation :

$$\begin{cases} z = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

La première relation correspond au plan xOy . La seconde relation représente l'équation de la trajectoire dans ce plan. Ces deux relations définissent les équations des liaisons appelées souvent liaisons. Le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de coordonnées qui représentent la position de m (trois dans le cas général) moins le nombre de liaisons (deux dans le cas présent). La particule possède donc un degré de liberté. Il faut choisir une variable q pour repérer sa position. Cette variable est appelée coordonnée généralisée. Il est possible d'exprimer le vecteur position $\vec{r}$ de la particule en fonction de la coordonnée généralisée q pr la relation : $\vec{r} = \vec{r}\,(q)$.

Soit $\vec{F}$ la résultante de toutes les forces agissant sur la particule. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

où $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ est la vitesse de la particule.

Soit δW le travail fourni par la force $\vec{F}$ lors d'un déplacement infinitésimal $\delta\vec{r}$:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}$$

Le déplacement $\delta\vec{r}$ peut s'écrire en fonction de la variation δq de la coordonnée généralisée q :

$$\delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\delta q$$

Dans ce cas le travail δW peut se mettre la forme :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \delta q$$

On appelle force généralisée conjuguée de q, ou q-composante de la force, la quantité F_q définie par :

$$F_q = \frac{\delta W}{\delta q} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}$$

Par conséquent δW s'écrit :

$$\delta W = F_q \, \delta q$$

En tenant compte de la relation fondamentale de la dynamique, cette expression peut également s'écrire :

$$\delta W = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \delta q$$

D'autre part :

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right] = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} + \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right]$$

Sachant que

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right] = \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \frac{\partial \vec{v}}{\partial q}$$

on obtient

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right] - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q}$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}$, peut aussi s'écrire :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\dot{q}$$

D'où la relation :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}}$$

et

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}}\right] - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q}$$

Sachant que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[\frac{1}{2}v^2\right] = \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[\frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{v}\right] = \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}}$$

et que

$$\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{2}v^2\right] = \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{v}\right] = \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q}$$

on obtient

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left[\frac{1}{2}v^2\right]\right]-\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{2}v^2\right]$$

L'expression du travail δW peut alors s'écrire :

$$\delta W=m\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left[\frac{1}{2}v^2\right]\right]-\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{2}v^2\right]\right\}\delta q$$

Si on note $T=\frac{1}{2}mv^2$ l'énergie cinétique de la masse m , on obtient finalement :

$$\delta W=\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right]-\frac{\partial T}{\partial q}\right\}\delta q$$

On obtient finalement les deux expressions équivalentes du travail δW

$$\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right]-\frac{\partial T}{\partial q}\right\}\delta q=F_q\,\delta q$$

On en déduit l'équation de Lagrange pour un système à un degré de liberté :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right]-\frac{\partial T}{\partial q}=F_q$$

1.1.2 Cas des systèmes conservatifs

Dans les systèmes conservatifs, la force appliquée au système dérive d'un potentiel U et elle s'écrit :

$$F_q=-\frac{\partial U}{\partial q}$$

L'équation de Lagrange devient alors :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right]-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial U}{\partial q}$$

Généralement l'énergie potentielle U ne dépend pas de la vitesse, c'est–dire que $\frac{\partial U}{\partial\dot{q}}=0$. L'équation de Lagrange peut alors s'écrire :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial\dot{q}}\right]-\frac{\partial\left(T-U\right)}{\partial q}=0$$

On introduit la fonction de Lagrange (ou lagrangien du système) qui est la différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{L}=T-U$$

D'où la forme de l'équation de Lagrange dans le cas d'un système conservatif :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right]-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}=0$$

1.1.3 Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse

Equation de Lagrange

Considérons une situation physique dans laquelle la particule est soumise à des forces de frottement de viscosité dont la résultante $\vec{f}$ est de la forme :

$$\vec{f} = -\alpha\,\vec{v}$$

Pour calculer la force généralisée f_q correspondante, nous utilisons la définition du paragraphe précédent :

$$f_q = \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = -\alpha\,\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right]^2\,\frac{\partial q}{\partial t}$$

Cette dernière expression peut se mettre sous la forme :

$$f_q = -\beta\,\dot{q}$$

avec

$$\beta = \alpha\,\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\right]^2$$

Si en plus des forces qui dérivent d'un potentiel il existe des forces de frottement de viscosité, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial T}{\partial q} = F_{U,q} + f_q$$

où $F_{U,q} = -\dfrac{\partial U}{\partial q}$ représente les forces qui dérivent d'un potentiel. D'où :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\beta\,\dot{q}$$

Fonction dissipation

Calculons le travail δW_f fourni par la force de frottement pendant un intervalle de temps δt pour un déplacement $\delta\vec{r}$:

$$\delta W_f = \vec{f} \cdot \delta\vec{r} = -\alpha\,v^2\,\delta t$$

La quantité de chaleur δQ gagnée par le système en interaction avec la particule, est telle que :

$$\delta Q = \alpha\,v^2\,\delta t$$

Soit $P_d = \dfrac{\delta Q}{\delta t}$ la puissance dissipée par les forces de frottement sous forme de chaleur :

$$P_d = \alpha\,v^2$$

Cette puissance dissipée peut être exprimée en fonction de $\dot{q}$, par :

$$P_d = \alpha\,\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]^2 = \alpha\,\left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t}\right]^2 = \beta\,\dot{q}^2$$

Par définition, la fonction dissipation est égale à la demi-puissance dissipée :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} P_d = \frac{1}{2} \beta \, \dot{q}^2$$

La q-composante f_q de la force de frottement peut alors s'écrire :

$$f_q = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}}$$

L'équation de Lagrange s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} = 0$$

1.1.4 Cas d'une force extérieure dépendant du temps

Considérons le cas plus général d'un force extérieure dépendant du temps agissant sur un système qui est le siège de forces de frottement qui dérivent d'une fonction dissipation $\mathcal{D}$. Soit F_{eq} la q-composante de la force extérieure. Dans ce cas l'équation de Lagrange peut s'écrire sous l'une des deux formes équivalentes suivantes :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = F_{eq} - \beta \, \dot{q}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} = F_{e,q}$$

1.2 Système à plusieurs degrés de liberté

Dans le cas général d'un système à plusieurs degrés de liberté, il y a autant d'équations de Lagrange que de degrés de liberté. Ainsi, si le système possède N degrés de liberté, il est nécessaire d'avoir N coordonnées généralisées $q_i \, (i = 1, 2, ..., N)$; nous aurons ainsi N équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = F_{e,q_i} \quad (i = 1, 2, ..., N)$$

La q$_i-$composante de la force généralisée extérieure est définie par :

$$F_{e,q_i} = \left.\frac{\delta W}{\delta q_i}\right|_{\delta q_i \neq 0}$$

Dans cette expression δW représente le travail des forces extérieures résultant d'une variation δq_i de la coordonnée q_i telle que les coordonnées $q_{j\neq i}$ soient constantes $(\delta q_{j\neq i} = 0)$.